CONCURSUL INTERNAȚIONAL „ION BARBU – DAN BARBILIAN”

Ediția a XXI - a, Călărași, 29 octombrie 2016

Clasa a VII–a

P1. După un meci de tenis de câmp, la simplu, un jucător pierde și celălalt câștigă. Învinsul părăsește competiția, iar învingătorul se califică și joacă în turul următor. Dacă la un turneu participă n jucători, toți jucătorii joacă în primul tur și toți jucătorii calificați joacă în turul următor, arată că la acel turneu se joacă $n-1$ meciuri.

Sorin Furtună, Călărași

Soluție: În primul tur se joacă $\frac{n}{2}$ meciuri, în al doilea $\frac{n}{4}$ meciuri, în turul trei se joacă $\frac{n}{8}$ meciuri și așa mai departe în al m-lea tur (ultimul) se joacă $\frac{n}{2^m}$ meciuri (1p). Cum $\frac{n}{2^m}=1$ (ultimul tur este final) deducem că $n=2^m$; calculând numărul mecirulor obținem:
$\frac{n}{2}+\frac{n}{4}+\frac{n}{8}+\ldots+\frac{n}{2^m}=\frac{2^m}{2}+\frac{2^m}{2^2}+\frac{2^m}{2^3}+\ldots+1=2^{m-1}+2^{m-2}+2^{m-3}+\ldots+1=2^m-1$. Deci numărul total de meciuri jucate este $2^m-1=n-1$. (2p)

P2. Se consideră ecuațiile:

$x^2+y^2+z^2=6t^2 \quad (1)$

$x^2+y^2+z^2=7t^2 \quad (2)$

a) Să se arate că ecuația (1) are o infinitate de soluții $x, y, z, t\in\mathbb{Z}$.

b) Să se arate că ecuația (2) nu are soluții în $\mathbb{Z}^*$.

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluție: **a)** $x=k,\ y=k,\ z=2k,\ t=k,\ k\in\mathbb{Z}$. (2p) **b)** $x^2+y^2+z^2=7t^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+t^2=8t^2$; presupunem că x, y, z, t este o soluție a ecuației (2), dacă numerele x, y, z, t sunt toate pare, atunci și numerele $\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}, \frac{t}{2}$ este o soluție a ecuației (2) și se continuă până când unul din numerele componente ale soluției este impar, în concluzie putem presupune că cel puțin unul din numerele x, y, z, t este impar ; pătratele perfecte modulo 8 sunt $0,\ 1$ și 4;
$x^2=1 \pmod 8$ sau $y^2=1 \pmod 8$ sau $y^2=1 \pmod 8$ sau $z^2=1 \pmod 8$ sau $t^2=1 \pmod 8 \Rightarrow$
$x^2+y^2+z^2+t^2\neq 0 \pmod 8$, de unde x, y, z, t nu este o soluție a ecuației (2), contradicție. (2p)

P3. Să de arate că există o infinitate de multipli ai numărului 2017 care încep cu 2016 și se termină cu 2016 (*numerele sunt scrise în baza 10*).

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluție: 1. din teorema împărțirii cu rest există c și r numere naturale $r<2017$, astfel încât $2016\cdot 10^4=2017\cdot c+r$; numărul $A=2016\cdot 10^4+(2017-r)$ este divizibil cu 2017 și începe cu 2016; (3p)
2. numerele 2017 și 10^4 sunt relativ prime; există $a, b\in\mathbb{N}$ asfel încât $a\cdot 2017-b\cdot 10^4=1\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow(2016a)\cdot 2017-(2016b)\cdot 10^4=2016\Leftrightarrow(2016b)\cdot 10^4+2016=(2016a)\cdot 2017$; numărul $B=(2016b)\cdot 10^4+2016$ este multiplu al lui 2017 și care se termină cu 2016; (3p)
3. $\forall k\in\mathbb{N}$, cu proprietatea $10^k>B\Rightarrow N=A\cdot 10^k+B$ este un număr cu proprietatea cerută. (1p)

P4. Fie $a,\ b,\ m\in\mathbb{N}\setminus\{0,\ 1\}$ pentru care sunt adevărate, simultan, propozițiile:

P_1: $a\,|\,b^m+1$ și există $m'\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $a\,|\,b^{m'}-1$;

P_2: n este cel mai mic număr natural nenul cu proprietatea $a\,|\,b^n-1$.

Dacă m nu este divizibil cu n și $r\in\mathbb{N}$ este restul împărțirii lui m la n, arătați că $n=2r$.

Gheorghe Stoianovici, Călărași

Soluție: $a\,|\,b^n-1\Rightarrow a\,|\,b^{kn}-1,\ \forall k\in\mathbb{N}$;

$\forall x \in \mathbb{N}$ există și sunt unice $c',\ r' \in \mathbb{N},\ r' < n$ astfel încât $x = c'n + r' \Rightarrow b^x - b^{r'} = b^{r'}\left(b^{c'n} - 1\right) \Rightarrow a \mid b^x - b^{r'}$;

pentru că $b^x - b^{r'} = b^x - 1 - \left(b^{r'} - 1\right)$ rezultă $a \mid b^x - 1 \Leftrightarrow a \mid b^{r'} - 1 \Leftrightarrow r' = 0 \Leftrightarrow n \mid x$;(3p)

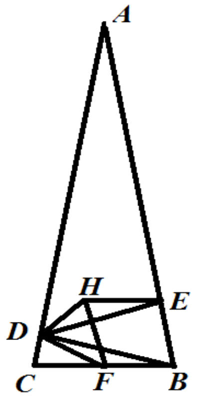
există și sunt unice $c,\ r \in \mathbb{N},\ 1 \le r < n$ astfel încât $m = cn + r$;

$b^m + 1 = b^r\left(b^{cn} - 1\right) + b^r + 1$ și $a \mid b^m + 1 \Rightarrow a \mid b^r + 1 \Rightarrow a \mid b^{2r} - 1 \Rightarrow n \mid 2r$; (3p)

pentru că $2 \le 2r \le 2n - 2 \Rightarrow n = 2r$.(1p)

P5. Fie ABC un triunghi isoscel, $AB = AC$, cu $m(\angle BAC) = 20^\circ$. Dacă $BD \perp AC$, $D \in (AC)$ și $E \in (AB)$ cu proprietatea $BC = 2BE$, atunci determină măsura unghiului $\angle ADE$.

Viorica Stoianovici, Călărași



Soluție: $F \in (BC)$, $FB = FC \Rightarrow FD = FC = FB = BE$; (1p) există și este unic punctul H astfel încât $BF \parallel EH$ și $BE \parallel FH \Rightarrow BEHF$ romb (1p);
$m(\angle DFH) = 180^\circ - m(\angle CFD) - m(\angle BFH) = 60^\circ \Rightarrow \Delta DFH$ este echilateral (1p)
$\Rightarrow m(\angle DHE) = m(\angle DHF) + m(\angle FHE) = 60^\circ + 80^\circ = 140^\circ$; (1p) $DH = HE \Rightarrow$
$m(\angle DEH) = 20^\circ\ (1p) \Rightarrow m(\angle AED) = m(\angle AEH) + m(\angle DEH) = 80^\circ + 20^\circ = 100^\circ$;
$m(\angle ADE) = 60^\circ$. (2p)

Succes