CONCURSUL INTERNAŢIONAL „ION BARBU – DAN BARBILIAN”

Ediţia a XXI - a, Călăraşi, 29 octombrie 2016

Clasa a VI–a

P1. Dacă $n\in\mathbb{N},\ n\geq 4,$ atunci găseşte două numere naturale nenule x şi y cu proprietatea $x+y+xy=2+3+\ldots+n.$

Gabriela Ruse, Călăraşi

Soluţie: $xy+x+y=2+3+\ldots+n \Leftrightarrow (x+1)(y+1)=\dfrac{n(n+1)}{2};$ (3p) 1. $n=2k,\ k\in\mathbb{N},\ k\geq 2 \Rightarrow x=k-1=\dfrac{n}{2}-1$ şi $y=2k=n;$ (2p)2. $n=2k+1,\ k\in\mathbb{N},\ k\geq 2\Rightarrow x=2k=n-1$ şi $y=k=\dfrac{n-1}{2};$ (2p)

P2. Fie $a,\ b$ numere naturale nenule, $a<b,$ şi mulţimile $A=\{a,\ a+1,\ a+2,\ a+3,\ a+4,\ a+5\},$ $B=\{b,\ b+1,\ b+2,\ b+3,\ b+4,\ b+5\},\ C=\{xy \mid x\in A,\ y\in B\}.$ Dacă $49\in C,$ $C\cap\{64k \mid k\in\mathbb{N}\}=\phi$ şi există $n\in C,\ n>76,$ atunci determină toate perechile posibile $(a,\ b).$

Adriana Constantin, Călăraşi

Soluţie: $49=1\cdot 49$ sau $49=7\cdot 7\Rightarrow a=1$ şi $b\in\{44,\ 45,\ 46,\ 47,\ 48,\ 49\}$ sau $a\in\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$ şi $b\in\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\};$ (2p)

1. $(1,\ b),\ b\in\{44,\ 45,\ 46,\ 47,\ 48\}\Rightarrow 3\cdot 64\in C;$ (1p)2. $(a,\ b),\ a<b,\ 3\leq a\leq 7$ şi $4\leq b\leq 7\Rightarrow 8\in A\cap B\Rightarrow 64\in C;$ (1p) 3. $(2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (2,\ 5)\Rightarrow \forall x\in C,\ x\leq 70;$ (1p) 4. Singurele perechi $(a,\ b)$ care respectă cerinţele $49\in C,$ $C\cap\{64k \mid k\in\mathbb{N}\}=\phi$ şi există $n\in C,\ n>76,$ sunt $(2,\ 6),\ (2,\ 7)$ şi $(1,\ 49).$ (2p)

P3. Fie M o mulţime de numere naturale cu proprietăţile:

1) oricare ar fi $x,\ y\in M$ rezultă $x+y\in M;$

2) există două submulţimi $A,\ B$ ale mulţimii M cu proprietăţile $A\cup B=M$ şi $A\cap B=\phi;$

3) $x+y+z\in A$ oricare ar fi $x,\ y,\ z\in A$ şi $x+y+z\in B$ oricare ar fi $x,\ y,\ z\in B$.

a) Dacă $M=\mathbb{N}$ determină două submulţimi $A,\ B$ cu proprietăţile **2)** şi **3)** .

b) Demonstrează că dacă o mulţime de numere naturale M are proprietăţile **1), 2)** şi **3),** atunci $x+y\in A,$ oricare ar fi $x,\ y\in A$ sau $x+y\in B,$ oricare ar fi $x,\ y\in B.$

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluţie: a) $A=\{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ \ldots\}$ şi $B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots\};$ (2p) **b)** presupunem că există $x,\ y\in A$ astfel încât $x+y\in B$ şi există $u,\ v\in B$ astfel încât $u+v\in A\Rightarrow x,\ y,\ u+v\in A$ (2p) şi $u,\ v,\ x+y\in B\Rightarrow x+y+u+v\in A\cap B,$ contradicţie. (3p)

P4. Se consideră şirul de mulţimi $M_1=\left\{\dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{3}\right\},$ $M_2=\left\{\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1+2}{2+3},\ \dfrac{2}{3}\right\}=\left\{\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{5},\ \dfrac{2}{3}\right\},$ $M_3=\left\{\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1+3}{2+5},\ \dfrac{3}{5},\ \dfrac{3+2}{5+3},\ \dfrac{2}{3}\right\}=\left\{\dfrac{1}{2},\ \dfrac{4}{7},\ \dfrac{3}{5},\ \dfrac{5}{8},\ \dfrac{2}{3}\right\},\ \ldots .$

a) Dacă $a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{N}^*$ cu proprietatea $\dfrac{a}{b}<\dfrac{c}{d},$ arătaţi că $\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+c}{b+d}<\dfrac{c}{d}.$

b) Arătaţi că pentru orice număr natural $n\in\mathbb{N}^*,$ toate elementele mulţimii M_n sunt fracţii ireductibile.

Gheorghe Stoianovici, Călăraşi

Soluţie a) $\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+c}{b+d}\Leftrightarrow ab+ad<ab+ad\Leftrightarrow\dfrac{a}{b}<\dfrac{c}{d};$ asemănător se arată că inegalitatea $\dfrac{a+c}{b+d}<\dfrac{c}{d}$ este adevărată; (2p) **b)** dacă $a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{N}^*$ cu proprietatea $\dfrac{a}{b}<\dfrac{c}{d}$ şi $bc-ad=1\Rightarrow$ (1p) $\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+c}{b+d}<\dfrac{c}{d}$ şi $b(a+c)-a(b+d)=$

$= c(b+d) - d(a+c) = 1 \Rightarrow$ (1p) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ și $\forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in M_n$ astfel încât $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, dacă nu există $x \in M_n$ cu proprietatea $\frac{a}{b} < x < \frac{c}{d} \Rightarrow bc - ad = 1$; se obervă că elementele mulțimilor M_1, M_2, M_3 sunt fracții ireductibile și oricare $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in M_3$ astfel încât $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ și dacă nu există $x \in M_3$ cu proprietatea $\frac{a}{b} < x < \frac{c}{d} \Rightarrow bc - ad = 1$; (1p) presupunem că există $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ și fracția reductibilă $\frac{k}{m} \in M_{n+1}$, $\frac{k}{m} \neq \frac{1}{2}$ și $\frac{k}{m} \neq \frac{2}{3} \Rightarrow \exists a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$ cu proprietățile: $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in M_n$, $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, $bc - ad = 1$, $k = a + c$ și $m = b + d$; fracția $\frac{k}{m}$ reductibilă $\Rightarrow \exists x \in \mathbb{N}, x \geq 2$ astfel încât $x \mid a + c$ și $x \mid b + d \Rightarrow x \mid b(a+c) - a(b+d) \Rightarrow x \mid 1$, contradicție. (2p)

Succes