Danube Mathematical Competition

Călăraşi – 31. 10. 2015

Soluţii juniori

Problema 1

Se consideră un număr natural $n = \overline{a_1 a_2 ... a_k}$, $k \geq 2$. Un *trunchiat* al lui n este un număr de forma $\overline{a_1 a_2 ... a_t}$, $1 \leq t \leq k-1$. (De exemplu, numărul 23 este un trunchiat al numărului 2351). Se notează cu $T(n)$ suma tuturor trunchiaţilor lui n. Dacă $S(n) = a_1 + a_2 + ... + a_k$, arătaţi că $n = S(n) + 9 \cdot T(n)$.

TST – Olanda 2009. Selectată de prof. Andrei Eckstein, Timişoara

Soluţie: $T(n) = \sum_{t=1}^{k-1} \overline{a_1 a_2 ... a_t}$. Pentru $t \geq 2$ avem $\overline{a_1 a_2 ... a_t} = a_t + 10 \cdot \overline{a_1 a_2 ... a_{t-1}}$.
Adunând relaţiile obţinute se obţine concluzia.

Problema 2

Se consideră mulţimea $A = \{1, 2, 3, ..., 120\}$ şi M o submulţime a lui A care are 30 de elemente. Arătaţi că există cinci submulţimi diferite ale lui M, fiecare având câte două elemente, astfel încât modulul diferenţei elementelor din fiecare submulţime să fie acelaşi.

Selectată de prof. Cristian Mangra, Bucureşti

Soluţie. Fie $M = \{a_1, a_2, ..., a_{30}\}$, unde $a_1 < a_2 < ... < a_{30}$. Presupunem contrariul şi considerăm submulţimile $M_1 = \{a_1, a_2\}$, $M_2 = \{a_2, a_3\}, ..., M_{29} = \{a_{29}, a_{30}\}$. Atunci:

$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + ... + (a_{29} - a_{28}) + (a_{30} - a_{29}) \geq 4 \cdot (1+2+3+4+5+6+7) + 8 = 120 .$$

Obţinem $a_{30} - a_1 \geq 120$, de unde $a_{30} > 120$, contradicţie.

Problema 3

Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale ecuaţia $a^2 = 2^b \cdot 3^c + 1$.

prof. Lucian Petrescu, Tulcea

Soluţie. Dacă $b = 0$, ecuaţia se scrie $3^c = (a-1)(a+1)$. Rezultă că a este par şi atunci $(a-1, a+1) = 1$; se obţine soluţia $(a,b,c) = (2,0,1)$.

Dacă $b \geq 1$, atunci a este impar, deci $(a-1, a+1) = 2$. Cum $2^b \cdot 3^c = (a-1)(a+1)$, sunt trei posibilităţi:

Cazul 1: $\begin{cases} a-1=2 \\ a+1 = 2^{b-1} \cdot 3^c \end{cases}$, care conduce la soluţia $(a,b,c) = (3,3,0)$.

Cazul 2: $\begin{cases} a-1 = 2^{b-1} \\ a+1 = 2 \cdot 3^c \end{cases}$, care conduce la $3^c - 2^{b-2} = 1$.

Pentru $b \leq 2$ nu avem soluţie. Pentru $b = 3$ obţinem $(a,b,c) = (5,3,1)$. Dacă $b \geq 4$, analizând ecuaţia modulo 4, obţinem că c este număr par nenul. Notând $c = 2k$, $k \geq 1$, atunci $2^{b-2} = (3^k - 1)(3^k + 1)$. Cum $(3^k - 1, 3^k + 1) = 2$, deducem că $3^k - 1 = 2$, deci $k = 1$. Obţinem soluţia $(a,b,c) = (17,5,2)$.

Cazul 3: $\begin{cases} a-1 = 2 \cdot 3^c \\ a+1 = 2^{b-1} \end{cases}$, cu $c \geq 1$ (pentru $c = 0$ suntem în cazul 1), care conduce la $2^{b-2} - 3^c = 1$.

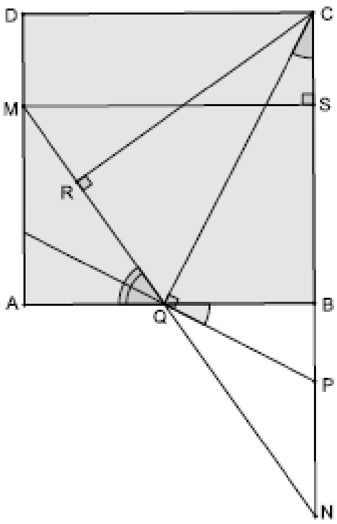
Reducând modulo 3, rezultă că b este par, $b = 2p$, $p \geq 2$, de unde se obţine $(2^{p-1} - 1)(2^{p-1} + 1) = 3^c$. Ca urmare, există $m, n \in \mathbb{N}$ astfel încât $2^{p-1} - 1 = 3^m$ şi $2^{p-1} + 1 = 3^n$, de unde $3^n - 3^m = 2$, echivalent cu $3^m (3^{n-m} - 1) = 2$. Se obţine $m = 0$, $n = 1$, $p = 2$, valori care conduc la soluţia $(a,b,c) = (7,4,1)$.

Aşadar, ecuaţia are cinci soluţii: $(2,0,1)$, $(3,3,0)$, $(5,3,1)$, $(7,4,1)$ şi $(17,5,2)$.

Problema 4

Se consideră dreptunghiul $ABCD$, cu $AB \geq BC$. Punctul M este situat pe latura (AD), iar mediatoarea segmentului $[MC]$ intersectează dreapta BC în punctul N. Fie $\{Q\} = MN \cap AB$. Ştiind că $m(\sphericalangle MQA) = 2 \cdot m(\sphericalangle BCQ)$, arătaţi că patrulaterul $ABCD$ este pătrat.

Selectată de prof. Mircea Fianu, Bucureşti



Soluţie. Bisectoarea unghiului $\widehat{NQB}$ intersectează dreapta BC în punctul P. Deoarece $\widehat{NQB} \equiv \widehat{MQA}$, rezultă că $\widehat{PQB} \equiv \widehat{QCP}$. Deducem că triunghiul PQC este dreptunghic în Q. Prin urmare, semidreapta $(QC$ este bisectoarea unghiului $\widehat{MQB}$.

Considerăm $R \in MN$ astfel încât $CR \perp MN$. Cum $CB \perp QB$, rezultă că $CB = CR$. (1)

Fie $S \in BC$ astfel încât $MS \perp BC$. Cum triunghiul NMC este isoscel, $NC = NM$, rezultă că $CR = MS$ (înălţimi). (2)

Deoarece patrulaterul $ABSM$ este dreptunghi obţinem $AB = MS$. (3)

Din (1), (2), (3), deducem că $AB = BC$, deci patrulaterul $ABCD$ este pătrat.

Problema 5

Pentru a funcţiona, o lanternă are nevoie de **exact două** baterii încărcate. Avem la dispoziţie n baterii încărcate şi n baterii descărcate, $n \geq 4$. (Cele $2n$ baterii arată identic.)

O probă înseamnă constă în a introduce două baterii în lanternă şi a verifica dacă lanterna funcţionează. Arătaţi că sunt suficiente $n+2$ probe pentru a determina o pereche de baterii încărcate.

Selectată de prof. Cristian Lazăr, Iaşi

Soluţie. Folosind principiul cutiei, are loc următoarea:

> **Observaţie.** Având a baterii încărcate şi b baterii descărcate, cu $a-b \geq 2$ şi $b \geq 2$, sunt suficiente b probe pentru a determina o pereche de baterii încărcate.

Prin urmare, în cazul nostru, este suficient ca, printr-un număr mic de probe, să eliminăm un număr de baterii neîncărcate cu cel puţin 2 mai mare decât numărul de baterii încărcate.

Dacă iniţial alegem la întâmplare două seturi de câte 3 baterii, pentru fiecare set în parte sunt necesare cel mult 3 probe, în total cel mult 6 probe. Dacă lanterna nu se aprinde, înseamnă că în fiecare set de baterii, cel mult una este încărcată şi cel puţin 2 sunt descărcate. Eliminând cele 6 baterii din cele $2n$ baterii, rămânem cu cel puţin $n-2$ baterii încărcate şi cel mult $n-4$ baterii descărcate. Conform observaţiei, sunt suficiente $n-4$ probe pentru a determina o pereche de baterii încărcate. În acest caz, am efectuat cel mult $6+(n-4)=n+2$ probe.