CONCURSUL INTERNAȚIONAL „ION BARBU – DAN BARBILIAN”

Ediția a XX - a, Călărași, 24 octombrie 2015

Clasa a VII–a

P1. Pentru $n \in \mathbb{N},\ n \geq 4,$ se consideră propoziția:

„Mulțimea $A = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots, n\}$ admite două submulțimi B și C care au proprietățile:

1. fiecare din mulțimile B și C conține cel puțin două elemente;
2. $B \cup C = A$;
3. $B \cap C$ este mulțimea vidă;
4. suma elementelor mulțimii B este egală cu produsul elementelor mulțimii C.”

Arătați că:

a) dacă $n = 4,$ atunci propoziția este falsă;

b) pentru orice $n \geq 5,$ propoziția este adevărată.

Gabriela Ruse, Călărași

P2. Găsește toate perechile de numere naturale nenule $(n,\ m)$ cu proprietatea $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{25}.$

Adriana Constantin, Călărași

P3. Dacă a este un număr natural par iar b este un număr natural impar astfel încât $a > b \geq 3,\ a + b \mid ab + 1$ și $a - b \mid ab - 1,$ arătați că $a^2 \leq 2\left(b^2 - 1\right).$

Gheorghe Stoianovici, Călărași

P4. Fie $ABCD$ un paralelogram care are măsura unghiului A egală cu 60°. Dacă bisectoarea unghiului B intersectează diagonala AC în punctul M și latura DC în punctul N, bisectoarea unghiului D intersectează diagonala AC în punctul P și latura AB în punctul Q iar patrulaterul $BNDQ$ este romb arătați că $AC = 3MP.$

Aurelia Cațaros, Călărași

P5. Fie triunghiul isoscel *ABC*, cu *AB* = *AC* şi $m\left(\angle ACB\right) = 75^0$. În interiorul unghiului ABC se consideră semidreptele $[BE$ şi $[BM$ astfel încât $m\left(\angle ABE\right) = 15^0$ şi $m\left(\angle MBC\right) = 30^0$, $E, M \in (AC)$. Perpendiculara în *M* pe *BM* intersectează *AB* în *N*. Dacă *D* este mijlocul laturii $[BC]$ şi *P* este piciorul perpendicularei din *A* pe *BE*, demonstrați că $MD = NP$.

Sorin Furtună, Călărași

P6. Fie ABC un triunghi, d_1 simetrica dreptei BC față de dreapta BA și d_2 simetrica dreptei CB față de dreapta CA. O dreaptă care trece prin punctul A și nu intersectează segmentul $[BC],$ intersectează dreapta d_1 în punctul M și dreapta d_2 în punctul N. Să se arate că $BM + CN = BC$ dacă și numai dacă $m\left(\angle BAC\right) = 90^0.$

Vasile Pop, Cluj Napoca

Succes

Barem de corectare: Problema 1. a) 2 puncte; b) 2 puncte; Problema 2. 3 puncte; Problema 3. 7 puncte; Problema 4. 3 puncte; Problema 5. 4 puncte; Problema 6. 7 puncte.