## Enunțuri

### Problema 1

Determinaţi numărul natural $a=\frac{p+q}{r}+\frac{q+r}{p}+\frac{r+p}{q}$ , unde $p$ , $q$ şi $r$ sunt numere prime.

*prof. Lucian Petrescu, Tulcea*

### Problema 2

Numim *cuvânt* o succesiune de litere $\overline{l_1 l_2 ... l_n}, n \geq 1$. Un cuvânt $\overline{l_1 l_2 ... l_n}$ , $n \geq 1$, se numeşte *palindrom* dacă $l_k = l_{n-k+1}$, pentru oricare *k*, $1 \leq k \leq n$. Se consideră un cuvânt $X = \overline{l_1 l_2 ... l_{2014}}$ , în care $l_k \in \{A, B\}$, pentru oricare *k*, $1 \leq k \leq 2014$. Demonstrați că sunt suficiente 806 cuvinte palindrom pe care să le *lipim* astfel încât să obţinem cuvântul *X*.

*prof. Cristian Lazăr, Iaşi*

### Problema 3

Se consideră triunghiul *ABC*, $m(A) < 90°$, $AB \neq AC$ . Se notează cu *H* ortocentrul triunghiului *ABC*, cu *N* mijlocul segmentului [*AH*], cu *M* mijlocul segmentului [*BC*] şi cu *D* punctul de intersecţie a bisectoarei unghiului *BAC* cu segmentul [*MN*]. Demonstraţi că $m(ADH) = 90°$.

*selectată de prof. Mircea Fianu, Bucureşti*

### Problema 4

Se consideră numerele reale $a_1, a_2, ..., a_{2n}$ a căror sumă este egală cu 0. Arătaţi că, printre perechile $(a_i, a_j)$, $i < j$, unde $i, j \in \{1, 2, ..., 2n\}$, există cel puţin $2n-1$ perechi cu proprietatea că $a_i + a_j \geq 0$.

*prof. Cristian Mangra, Bucureşti*

**Soluţii**

**Problema 1**

*  Dacă $p=q=r$, atunci $a=6\in\mathbb{N}$.

** Dacă exact două din cele trei numere sunt egale, spre exemplu $p=q\neq r$, atunci obţinem: $a=2\left(\frac{p}{r}+\frac{r}{p}\right)+2\in\mathbb{N}$, deci există $n\in\mathbb{N}$ astfel încât $\frac{n}{2}=\frac{p}{r}+\frac{r}{p}$, adică $n=\frac{2\left(p^2+r^2\right)}{pr}$ şi cum $(p;r)=1$, rezultă că $p\mid 2\left(p^2+r^2\right)\Rightarrow p=2$, deci $n=\frac{r^2+4}{r}=r+\frac{4}{r}\in\mathbb{N}\Rightarrow r=2$, fals sau rezultă că $p\mid r$, de asemenea fals.

*** Dacă *p*, *q* şi *r* sunt distincte, din enunţ rezultă $apqr=pq(p+q)+qr(q+r)+rp(r+p)$, de unde $\begin{cases} p\mid qr(q+r) \\ q\mid rp(r+p) \\ r\mid pq(p+q) \end{cases}$, adică $\begin{cases} p\mid (q+r) \\ q\mid (r+p) \\ r\mid (p+q) \end{cases}$, deoarece $(p;q)=(q;r)=(r;p)=1$; prin urmare $\begin{cases} p\mid (p+q+r) \\ q\mid (p+q+r) \\ r\mid (p+q+r) \end{cases}$ şi deci obţinem $pqr\mid p+q+r$. Aşadar $pqr\leq p+q+r$. (1)

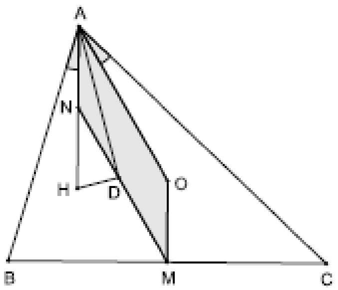
Cum *p*, *q* şi *r* sunt cel puţin egale cu 2, avem $\begin{cases} pqr\geq 2qr>4r \\ pqr\geq 2pr>4p \\ pqr\geq 2pq>4q \end{cases}$. De aici obţinem $pqr>\frac{4}{3}\cdot(p+q+r)>p+q+r$. (2)

Cum relaţiile (1) şi (2) sunt contradictorii, deducem că, în acest caz, nu avem soluţie.
Concluzionăm că $p=q=r$, deci $a=6$.

**Problema 2**

Împărţim cuvântul *X* în grupe de câte 5 litere consecutive şi astfel obţinem 402 grupe complete şi o grupă de 4 litere. Vom arăta că orice cuvânt scris cu cel mult cinci litere *A* sau *B* poate fi format prin lipirea a două cuvinte palindrom. Putem presupune că prima literă din cuvântul de cinci litere este ***A*.** Vom avea 16 cuvinte de cinci litere: *AAAAA* ; *AAAAB*; *AAABA*; … *ABBBB*. Toate cele 16 cuvinte sunt fie palindrom, fie sunt formate prin lipirea a două cuvinte palindrom.
Deci avem nevoie de $402\cdot 2=804$ cuvinte palindrom pentru a fi siguri că prin lipirea lor acoperim primele 2010 litere din cuvântul *X*. Pentru ultimele patru litere mai avem nevoie de cel mult 2 cuvinte. Prin urmare sunt suficiente $804+2=806$ cuvinte.

**Problema 3**




Fie $O$ centrul cercului circumscris triunghiului $ABC$. Semidreptele $(AH$ şi $(AO$ sunt izogonale. Deducem că $NAD \equiv OAD$ . (1)

Pe de altă parte, $OM \parallel AN$ şi $OM = \frac{AH}{2} = AN$, deci patrulaterul $MOAN$ este paralelogram. Rezultă că $MN \parallel OA$. (2)

Din (1) şi (2) obţinem $NAD \equiv OAD \equiv NDA$, deci triunghiul $NAD$ este isoscel cu $ND = NA$ . Deoarece, în triunghiul $DAH$, segmentul $[DN]$ este mediană, iar $DN = AN = \frac{AH}{2}$, rezultă că $m(ADH) = 90^\circ$.

**Problema 4**

Considerăm $a_1 \le a_2 \le ... \le a_{2n}$ şi $a_1 + a_2 + ... + a_{2n} = 0$.

* Dacă $a_n + a_{2n-1} \ge 0$ , atunci toate sumele $a_{2n-1} + a_i, i = \overline{n, 2n-2}$ precum şi toate sumele $a_{2n} + a_i, i = \overline{n, 2n-1}$ sunt numere nenegative. În total sunt cel puţin $(n-1) + n = 2n-1$ sume.

** Dacă $a_n + a_{2n-1} < 0$ , atunci $a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_{n+1} + ... + a_{2n-2} + a_{2n} > 0$. (1)
Vom avea $0 > a_n + a_{2n-1} \ge a_{n-1} + a_{2n-2} \ge a_{n-2} + a_{2n-3} \ge ... \ge a_2 + a_{n+1}$, prin urmare, $a_2 + a_3 ... + a_{n-1} + a_{n+1} + ... + a_{2n-2} + a_{2n-1} \le 0$. De aici, pe baza relaţiei (1), obţinem $a_1 + a_{2n} \ge 0$ şi deducem că, cel puţin toate cele $2n-1$ sume de forma $a_i + a_{2n}, i = \overline{1, 2n-1}$ , sunt numere nenegative.

Un exemplu pentru care obţinem exact $2n-1$ sume nenegative este: $\underbrace{-1, -1, ..., -1}_{(2n-1)\text{ori}}, 2n-1$ .