CONCURSUL INTERNAŢIONAL ,,ION BARBU – DAN BARBILIAN”

Ediţia a XIX - a, Călăraşi, 25 octombrie 2014

Clasa a VIII–a

Problema 1. Dacă $x, y, z \in \mathbb{R}$ cu proprietățile $x \neq y, x^2+y^2+z^2=1$ și $xy+yz+zx=-\frac{1}{2}$, atunci arătați că: $x^2+y^2>\frac{1}{3}$.

Adriana Olaru, Călăraşi

Soluție: Din $x^2+y^2+z^2=1$ și $xy+yz+zx=-\frac{1}{2} \Rightarrow (x+y+z)^2=0 \Rightarrow z=-(x+y)$;

$1=x^2+y^2+z^2=2(x^2+xy+y^2) \Rightarrow x^2+xy+y^2=\frac{1}{2}$; $3xy=xy+2xy<x^2+xy+y^2=\frac{1}{2} \Rightarrow xy<\frac{1}{6}$;

$z^2=xy+x^2+xy+y^2<\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3} \Rightarrow x^2+y^2>\frac{1}{3}$.

Problema 2. Dacă $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{11}\} \subset \left[\sqrt{2}, \sqrt{2}+1\right] \cap \mathbb{Q}$, arătați că există $i, j \in \{1, 2, \ldots, 11\}$, $i \neq j$ astfel încât $|a_i - a_j| < \frac{1}{10}$.

Gabriela Ruse, Călăraşi

Soluție: Observăm că intervalul dat are lungimea 1.
Presupunem că $\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, 11\}$, $i \neq j$, $|a_i - a_j| \geq \frac{1}{10}$. Fără a restrânge generalitatea, putem considera că: $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{11}$.
Avem $a_2 - a_1 \geq \frac{1}{10}$, $a_3 - a_2 \geq \frac{1}{10}$, ..., $a_{11} - a_{10} \geq \frac{1}{10}$. Prin adunare termen cu termen se obține: $a_{11} - a_1 \geq 10 \cdot \frac{1}{10}$. Ar trebui $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{11} = \sqrt{2}+1$. Contradicție. Se cunoaşte $a_{1,} a_{11} \in \boldsymbol{Q}$.

Problema 3. Găsiți toate numerele $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ cu proprietățile: $ad=b^2+bc+c^2$ și $a^2+b^2+c^2+d^2$ este număr prim.

Gheorghe Stoianovici, Călăraşi

Soluție: Notez cu $n=a^2+b^2+c^2+d^2$

$2ad=b^2+c^2+(b+c)^2$; $a^2+b^2+c^2+d^2=a^2+d^2+2ad-(b+c)^2=(a+b+c+d)(a+d-b-c)$

a) dacă $a=0$ sau $d=0 \Rightarrow b=c=0 \Rightarrow n=0$;

b) dacă $a=d=1 \Rightarrow b=1$ şi $c=0$ sau $b=0$ şi $c=1 \Rightarrow n=3$;

c) dacă $a>1$ sau $d>1 \Rightarrow$ $n=a^2+b^2+c^2+d^2>a+b+c+d \geq 2 \Rightarrow n$ nu este prim.

Soluții sunt: $a=b=d=1$ şi $c=0$ sau $a=c=d=1$ şi $b=0$.

Barem de corectare: Problema 1. 3 puncte; Problema 2. 4 puncte; Problema 3. 3 puncte; Problema 4. a) 2 puncte; b) 2 puncte; Problema 5. 7 puncte; Problema 6. 7 puncte.

Problema 4. Determinați toate numerele naturale n cu proprietatea că numărul n^2 are exact n divizori numere naturale.

Adriana Constantin, Călăraşi

Soluție: a) $n=0$ nu este soluție iar $n=1$ este soluție; b) $n>1$. Dacă $d|n^2,\ d<n \Rightarrow \frac{n^2}{d}|n^2,\ \frac{n^2}{d}>n,$ deci numărul divizorilor lui n^2 mai mici decât n este egal cu numărul divizorilor lui n^2 mai mari decât n. În plus, $n|n^2$, ceea ce implică faptul că n^2 are un număr impar de divizori deci n este un număr impar. Prin urmare problema revine la a găsi numerele impare n cu proprietatea că numărul divizorilor lui n^2 mai mici decât n este $\frac{1}{2}(n-1)$. Altfel spus toate numerele impare mai mici decât n îl divid pe n^2; $(n-2)|n^2$ și $n^2=(n-2)(n+2)+4 \Rightarrow (n-2)|4 \Rightarrow n=3$.

Problema 5. Fie $ABCD$ un paralelogram care are aria egală cu 3 și două puncte $M,\ N,$ în interiorul său, astfel încât triunghiurile $AMB,\ MBN,\ BCN,\ CND,\ DNM$ şi DMA au ariile egale cu $\frac{1}{2}$. Să se arate că $M,\ N \in (AC)$ și $AM=MN=NC.$

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluţie. Din egalitatea ariilor triunghiurilor ABM şi ADM rezultă că punctul M se află pe mediana din A a triunghiului BAD, deci pe diagonala AC a paralelogramului (justificare!).

Analog din egalitatea ariilor triunghiurilor BNC şi CND rezultă că N se află pe mediana din C a triunghiului DCB, deci tot pe diagonala AC.

Acum din egalitatea ariilor triunghiurilor AMD, MND şi NCD (care au aceeaşi înălţime) rezultă $AM=MN=NC$.

Problema 6. Triunghiul ABC are proprietatea $AB<AC$ și cu I este notat centrul cercului înscris în triunghi. Dacă $BI \cap AC=\{D\}$ și $CI \cap AB=\{E\}$, arătați că $m(\measuredangle BAC)=60^\circ \Leftrightarrow IE=ID.$

Cristina Bornea, Călărași

Soluție: Fie $A=2\alpha,\ B=2\beta,\ C=2\gamma.$

$(\rightarrow)$ $60^\circ=A=2\alpha \Rightarrow 2\beta+2\gamma=60^\circ \Rightarrow m(\measuredangle DIE)=120^\circ \Rightarrow$ patrulaterul $ADIE$ este inscriptibil și cum $\measuredangle EAI \equiv \measuredangle DAI \Rightarrow ID=IE.$

$(\leftarrow)$ Presupunem că $ID=IE$ şi notăm $AB=c,\ AC=b,\ BC=c.$ Din teorema bisectoarei rezultă că $AD=\dfrac{bc}{a+c}$ şi $AE=\dfrac{bc}{a+b};\ c<b \Rightarrow AD>AE.$ Dacă D' este simetricul lui D față de AI, proprietatea $AD>AE \Rightarrow D' \in (EB)$. Din $\Delta AID \equiv \Delta AID' \Rightarrow ID=ID'=IE$ şi $m(\measuredangle IDA)=m(\measuredangle ID'A)=m(\measuredangle D'EI)=2\gamma+\beta.$
Pentru că $m(\measuredangle IEA)=\gamma+2\beta \Rightarrow 180^\circ=m(\measuredangle IEA)+m(\measuredangle D'EI)=2\beta+\gamma+2\gamma+\beta=3(\beta+\gamma) \Rightarrow \alpha=30^\circ$

Succes

Barem de corectare: Problema 1. 3 puncte; Problema 2. 4 puncte; Problema 3. 3 puncte; Problema 4. a) 2 puncte; b) 2 puncte; Problema 5. 7 puncte; Problema 6. 7 puncte.