CONCURSUL INTERNAŢIONAL „ION BARBU – DAN BARBILIAN”

Ediţia a XIX - a, Călăraşi, 25 octombrie 2014

Clasa a VII–a

Problema 1. Câte numere naturale conține șirul $\frac{2121}{107}, \frac{2122}{108}, \frac{2123}{109}, \frac{2124}{110}, \ldots$? (justifică răspunsul)

Luminița Bucureșteanu, Călărași

<u>Soluție</u>

$$\frac{2121}{107}=1+\frac{2014}{107};\ \frac{2122}{108}=1+\frac{2014}{108};\ \frac{2123}{109}=1+\frac{2014}{109};\ \frac{2124}{110}=1+\frac{2014}{110}$$

Termenii șirului sunt de forma $1+\frac{2014}{n}$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 107$

$$\left.\begin{array}{r} 1+\frac{2014}{n}\in\mathbb{N} \Rightarrow n \mid 2014 \\ \text{Dar } \ n\geq 107 \end{array}\right| \Rightarrow n\in\{1007;\, 2014\}$$

Deci sunt două numere naturale în șir.

Problema 2. Determinați cel mai mic număr natural nenul care înmulțit cu 3 este puterea a treia a unui număr natural, înmulțit cu 5 este puterea a cincea a unui număr natural şi înmulțit cu 7 este puterea a şaptea a unui număr natural.

Gabriela Ruse, Călărași

Soluție: Cum $3n=a^3,\ 5n=b^5,\ 7n=c^7, n\in N^*$. Din aceste relații n conține în scrierea ca produs de puteri de numere prime , obligatoriu factorii 3, 5 şi 7.

Cum n este minim, considerăm $n=3^k\cdot 5^t\cdot 7^s$. Atunci k este de forma M_3-1, M_5, M_7, t este de forma M_3, M_5-1, M_7, iar s este de forma $M_3,\ M_5, M_7-1$.

Valorile minime ale acestor numere sunt: $k=35, t=84, s=90$, iar $n=3^{35}\cdot 5^{84}\cdot 7^{90}$

Problema 3. Fie paralelogramul $ABCD$ și punctele $M\in(AB)$, $N\in(CD)$ astfel încât $MA=MB$ și $NC=ND$. Dacă P este simetricul lui M față de B, $AN\cap CP=\{Q\}$ și $BN\cap CM=\{G\}$, arătați că punctul G este centrul de greutate al triunghiului APQ.

Relu Ciupea , Oltenița

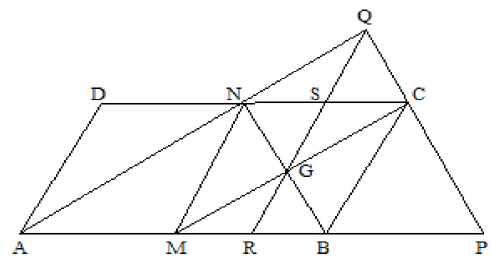
Soluție: $ABCD$ paralelogram $\Rightarrow AB \parallel CD$ și $AB=CD \Rightarrow MB\parallel NC$ și $MB=NC\Rightarrow MBCN$ paralelogram $\Rightarrow G$ este mijlocul lui (NB) respectiv (MC)

(GB) linie mijlocie în $\Delta MPC \Rightarrow GB \parallel PC \Leftrightarrow GN\parallel QC$ și $PC=2GB\,(1)$

(GM) linie mijlocie în $\Delta ANB \Rightarrow GM\parallel AN \Leftrightarrow GC \parallel NQ$

Barem de corectare: Problema 1. 3 puncte; Problema 2. 4 puncte; Problema 3. 3 puncte; Problema 4. 4 puncte; Problema 5. 7 puncte; Problema 6. 7 puncte.

Rezultă că $GCQN$ este paralelogram , deci



$GN = QC \Leftrightarrow GB = QC\,(2)$

Din (1) și $(2) \Rightarrow 3GB = PC + CQ = PQ$.

Fie R mijlocul lui $(MB) \Rightarrow MR = RB$

Cum $AM = MB = BP$ se obține că $AM + MR = RB + BP \Rightarrow AR = RP \Rightarrow R$ este mijlocul lui (AP) (3)

$GCQN$ este paralelogram , deci $GS = SQ$ și $SN = SC$

(GS) linie mijlocie în $\Delta MCN \Rightarrow GS \parallel MN$ și $GS = \dfrac{MN}{2}$

(GR) linie mijlocie în $\Delta MNB \Rightarrow GR \parallel MN$ și $GR = \dfrac{MN}{2}$

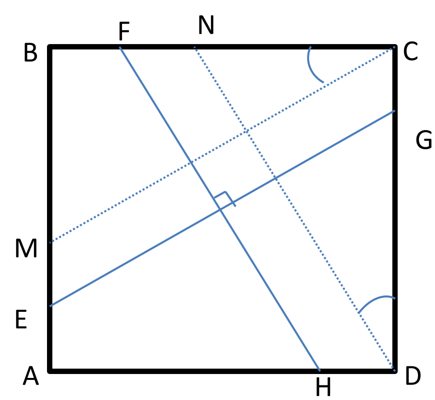
Rezultă că punctele G, S, R, Q sunt coliniare și folosind (3) QR este mediană în ΔAPQ

De asemenea se obține că $GS = GR$ și cum $GS = SQ$, rezultă că $SQ = GS = GR$, deci G este centrul de greutate al triunghiului APQ .

Problema 4. Fie pătratul $ABCD$ și punctele $E \in (AB),\ F \in (BC),\ G \in (CD),\ H \in (DA)$ astfel încât: $AE + FC + CG + HA = 2 \cdot AB$. Să se demonstreze că $EG \perp FH$.

Cristina Bornea, Călărași

Soluție:



Ducem $CM \parallel EG$ și DN$\parallel FH$ astfel încât CMEG și DHFN sunt paralelograme. $\Rightarrow ME = CG$ și FN=HD.

$$AE + FC + CG + HA = AE + FN + NC + CG + AH$$

$$= AE + ME + DH + AH + CN$$

$$= AM + AD + CN$$

$2AB = AB + AB - MB + CN \Rightarrow MB = CN$

$\Rightarrow \Delta DNC \equiv \Delta CMB \Rightarrow m(\sphericalangle NDC) = m(\sphericalangle MCB) = 90^\circ - m(\sphericalangle MCD)$

$\Rightarrow DN \perp MC$ și deci $EG \perp FH$.

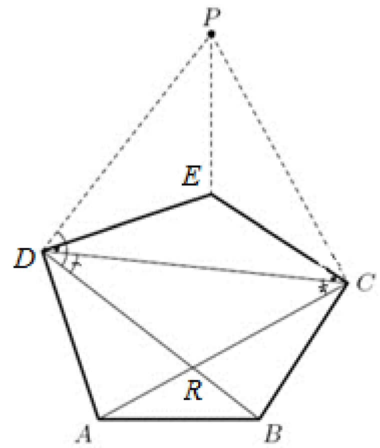
Problema 5. Fie $ABCD$ un patrulater convex cu proprietățile că există un punct E în semiplanul opus semiplanului determinat de dreapta CD și punctul A astfel încât $[BC] \equiv [CE],\ [DE] \equiv [AD]$, $m(\sphericalangle BCE) = 90^\circ$ și $m(\sphericalangle ADE) = 90^\circ$.

Arătați că se poate construi cu segmentele $[AC],\ [CD]$ și $[DB]$ un triunghi dreptunghic.

Gheorghe Stoianovici, Călărași

Barem de corectare: Problema 1. 3 puncte; Problema 2. 4 puncte; Problema 3. 3 puncte; Problema 4. 4 puncte; Problema 5. 7 puncte; Problema 6. 7 puncte.

Soluție: Fie punctul P în semiplanul determinat de dreapta DB și punctul C astfel încât $PD \perp DB$ și $[PD] \equiv [DB]$. Din congruența triunghiurilor ΔABD și ΔEPD rezultă $[AB] \equiv [PE]$ și $\measuredangle DEP \equiv \measuredangle DAB$. Suma măsurilor unghiurilor unui pentagon convex este 540° și această proprietate implică $m(\measuredangle ABC) = 360^\circ - m(\measuredangle DAB) - m(\measuredangle DEC) =$
$= 360^\circ - m(\measuredangle DEP) - m(\measuredangle DEC) = m(\measuredangle PEC)$. Din congruența triunghiurilor ΔABC și ΔPEC rezultă $[AC] \equiv [PC]$.



Problema 6. Determinați toate numerele naturale n cu proprietatea că numărul n^2 are exact n divizori numere naturale.

Adriana Constantin, Călăraşi

Soluție a) $n = 0$ nu este soluție iar $n = 1$ este soluție; b) $n > 1$. Dacă $d | n^2,\ d < n \Rightarrow \frac{n^2}{d} | n^2,\ \frac{n^2}{d} > n,$ deci numărul divizorilor lui n^2 mai mici decât n este egal cu numărul divizorilor lui n^2 mai mari decât n. În plus, $n | n^2$, ceea ce implică faptul că n^2 are un număr impar de divizori deci n este un număr impar. Prin urmare problema revine la a găsi numerele impare n cu proprietatea că numărul divizorilor lui n^2 mai mici decât n este $\frac{1}{2}(n-1)$. Altfel spus toate numerele impare mai mici decât n îl divid pe n^2; $(n-2) | n^2$ și $n^2 = (n-2)(n+2) + 4 \Rightarrow (n-2) | 4 \Rightarrow n = 3$.

Succes

Barem de corectare: Problema 1. 3 puncte; Problema 2. 4 puncte; Problema 3. 3 puncte; Problema 4. 4 puncte; Problema 5. 7 puncte; Problema 6. 7 puncte.