CONCURSUL INTERNAŢIONAL „ION BARBU – DAN BARBILIAN”

Ediţia a XIX - a, Călăraşi, 25 octombrie 2014

Clasa a VI–a

Problema 1. Elevii din clasa a VI - a din județul Călărași au completat un chestionar în care trebuiau să indice, în perspectiva evaluării naționale de la finalul clasei a VI - a, testul la care au nevoie de pregătire suplimentară, Matematică și Ştiinţe ale naturii sau/și Limbă și comunicare - Limba străină**.** La o primă centralizare a rezultatelor s-a stabilit că raportul dintre numărul elevilor care au indicat un test și numărul elevilor care au participat la sondaj a fost $\frac{9}{14}$ pentru Matematică și Ştiinţe ale naturii și $\frac{7}{12}$ pentru Limbă și comunicare - Limba străină. După încă o verificare a chestionarelor s-a constatat că 361de elevii nu au desemnat niciun test și 703 le-au nominalizat pe amândouă. Câți elevi au participat la sondaj? (justifică răspunsul)

Aurelia Cațaros, Călărași

Soluție: Notez cu n numărul elevilor care au participat la sondaj. Din $14|n$ și $12|n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*$ atfel încât $n = 84k$.

$361+(54k-703)+(49k-703)+703=84k \Leftrightarrow k=18 \Rightarrow n=1512.$

Problema 2. Numerele naturale 1, 2, 3, … 10 000 se scriu într-un tabel după regula arătată în desenul alăturat. Cu excepția numerelor scrise în prima linie (linia de jos în care sunt scrise numerele 1, 2, 9, 10 etc.) și a celor scrise în prima coloană (coloana din dreapta în care sunt scrise numerele 1, 4, 5, 16 etc.) fiecărui număr scris în tabel îi punem în corespondență un număr numit *etichetă* care este suma dintre numărul numerelor scrise în dreapta sa și numărul numerelor scrise dedesubt (de exemplu: *eticheta* lui 6 este numărul 3=1+2, *eticheta* lui 11 este numărul 4=3+1, *eticheta* lui 19 este numărul 6=2+4 etc.) .

37	38	39	40	41	42	43		
36	35	34	33	32	31	44		
17	18	19	20	21	30	45		
16	15	14	13	22	29	46		
5	6	7	12	23	28	47		
4	3	8	11	24	27	48		
1	2	9	10	25	26	49	50	

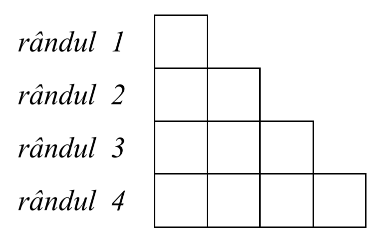
a) Care este *eticheta* numărului 66?
b) Care este numărul din tabel care are cea mai mare *etichetă*?
c) Care este *eticheta* numărului 2014?

Gheorghe Stoianovici, Călăraşi

Soluție: a) 9; b) urmărind felul în care se completează tabelul cu numerele 1, 2, 3 ,4; 1, 2, …, 16; 1, 2, …, 36 observăm că pentru n par numerele acoperă un pătrat în care n^2 este în pătrățelul din „stânga sus”; numărul din tabel care are cea mai mare *etichetă* este 100^2-99 (eticheta este 99+99=198); c) dacă numerotăm coloanele observăm că pentru n impar, numărul scris pe primul rând în coloana C_n este n^2; $45^2=2025 \Rightarrow$ *eticheta* numărului 2014 este 44+11=55

4	3	8	11	24	27	48	
1^2	2	3^2	10	5^2	26	7^2	50
C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8

Problema 3. În cele 10 pătrățele din desenul alăturat trebuie scrise 10 numere naturale, distincte două câte două, astfel încât suma numerelor de pe *rândul 4* este mai mică decât suma numerelor de pe *rândul 3* și suma numerelor de pe *rândul 3* este mai mică decât suma numerelor de pe *rândul 2*. În *rândul 1* se scrie un număr care este mai mare decât suma numerelor de pe *rândul 2*. Care este cel mai mic număr care se poate scrie în *rândul 1*? (justifică răspunsul)



Viorica Stoianovici, Călăraşi

Barem de corectare: Problema 1. 7 puncte; Problema 2. 7 puncte; Problema 3. a) 2 puncte; b) 2 puncte; c) 3 puncte; Problema 4. a) 2 puncte; b) 5 puncte.

Soluție: Notez cu s_i suma numerelor din *rândul* i, $i\in\{1, 2, 3, 4\}$.

I. Presupunem $s_1\le 12\Rightarrow s_4+s_3\le 19$, contradicție cu $s_4+s_3\ge 0+1+2+3+4+5+6=21\Rightarrow s_1\ge 13$;

II. Presupunem $s_1=13\Rightarrow s_4+s_3\le 21$; $s_4+s_3\ge 0+1+2+3+4+5+6=21\Rightarrow s_4+s_3=21$,

$\Rightarrow s_2\ge 15$, contradicție, deci $s_1\ge 14$.

Pentru $s_1=14$ există o variantă de completare , deci $s_1=14$.

14			
5	8		
2	4	6	
0	1	3	7

Problema 4. a) Găsește un număr natural n cu proprietatea că numărul n^2 are exact n divizori numere naturale.

b) Determină toate numerele naturale n cu proprietatea că numărul n^2 are exact n divizori numere naturale.

Adriana Constantin, Călăraşi

Soluție: a) 1 sau 3; b) i) $n=0$ nu este soluție iar $n=1$ este soluție; ii) $n>1$. Dacă $d|n^2$, $d<n\Rightarrow \frac{n^2}{d}|n^2$, $\frac{n^2}{d}>n$, deci numărul divizorilor lui n^2 mai mici decât n este egal cu numărul divizorilor lui n^2 mai mari decât n. În plus, $n|n^2$, ceea ce implică faptul că n^2 are un număr impar de divizori deci n este un număr impar. Prin urmare problema revine la a găsi numerele impare n cu proprietatea că numărul divizorilor lui n^2 mai mici decât n este $\frac{1}{2}(n-1)$. Altfel spus toate numerele impare mai mici decât n îl divid pe n^2; $(n-2)|n^2$ şi $n^2=(n-2)(n+2)+4\Rightarrow(n-2)|4\Rightarrow n=3$.

Barem de corectare: Problema 1. 7 puncte; Problema 2. 7 puncte; Problema 3. a) 2 puncte; b) 2 puncte; c) 3 puncte; Problema 4. a) 2 puncte; b) 5 puncte.