CONCURSUL INTERNAŢIONAL „ION BARBU - DAN BARBILIAN”

Ediţia a XVIII - a, Călăraşi, 1 - 3 noiembrie 2013

Clasa a VII–a

P 1. a) Găsiți numere naturale $n,\ n \geq 2$ cu proprietatea $\frac{1}{n} < 0{,}1025 < \frac{1}{n-1}$.

b) Dacă $\frac{1}{x+2012}+\frac{1}{y+2012}+\frac{1}{z+2012}=\frac{3}{2013}$, arătaţi că $\frac{x}{x+2012}+\frac{y}{y+2012}+\frac{z}{z+2012}=\frac{3}{2013}$.

c) Găsiți toate numerele de trei cifre care nu conțin cifra 0 și suma inverselor cifrelor numărului este egală cu 1.

P 2. a) Fie $ABCD$ un patrulater convex iar punctele M și N mijloacele laturilor (AD) și (BC). Dacă $(AC)\cap(BD)=\{O\}$, $(MN)\cap(BD)=\{E\}$, $(AC)\cap(MN)=\{F\}$, $O \notin MN$ și $[OE]\equiv[OF]$ atunci $[AC]\equiv[BD]$.

b) Fie ΔABC, punctele $D\in(AC)$ și $E\in(AB)$ astfel încât $m(\measuredangle ABD)=m(\measuredangle CBD)$, $CE\perp AB$ și $m(\measuredangle BCE)=20^\circ$. Dacă $BD\cap CE=\{F\}$ și punctul D aparține mediatoarea segmentului $[FC]$ atunci arătaţi că $BD+DF = AC$.

P 3. Pentru orice număr natural n se notează cu P_n produsul cifrelor sale.

a) Arătați că pentru toate numerele naturale care au 2013 cifre $P_n < 10^{2013}$.

b) Găsiți toate numerele naturale n cu proprietatea $P_n = \frac{25}{8}n - 211$.

P 4. Pentru fiecare submulțime nevidă $A=\{a_1,\ a_2,\ \ldots,a_k\}$ a mulțimii $\{1,\ 2,\ \ldots,10\}$, k=1, 2, … ,10 se consideră suma $S(A)=a_1-a_1a_2+a_1a_2a_3-\ \cdots\ +(-1)^{k-1}a_1a_2\ \ldots\ a_k$, unde $a_1<a_2<a_3<\cdots<a_k$. Să se determine suma tuturor acestor sume.

Succes

Barem de notare: P1. a) 3 puncte; b) 2 puncte; c) 2 puncte. **P2.** a) 4 puncte; b) 3 puncte. **P3.** a) 2 puncte; b) 5 puncte. **P4.** 7 puncte.