CONCURSUL INTERNAŢIONAL „ION BARBU - DAN BARBILIAN”

Ediţia a XVIII - a, Călăraşi, 1 - 3 noiembrie 2013

Clasa a VIII–a

P1. a) Dacă $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ astfel încât $a \neq b,\ c \neq -a,\ c \neq -b$ și $a^2+b^2=2c^2$ arătați că $\dfrac{(a+b+2c)(2a^2-b^2-c^2)}{(a-b)(a+c)(b+c)}=3.$

b) Dacă $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ astfel încât $a \geq b \geq c$ arătați că $\dfrac{a^3-c^3}{3} \geq abc\left(\dfrac{a-b}{c}+\dfrac{b-c}{a}\right).$

c) Fie $a,\ b,\ c \in \mathbb{Z}$ cu proprietatea $a^3+b^3=c^3$ Arătați că cel puțin unul dintre numerele $a,\ b,\ c$ este divizibil cu 3.

P 2. a) Fie triunghiul *ABC* și punctele $D \in (AB),\ E \in (BC),\ F \in (AC)$. Dacă triunghiul *ADF* este ascuțit unghic, $[EB] \equiv [ED]$ și $[EF] \equiv [EC]$ arătați că centrul cercului circumscris triunghiului *ADF* aparține bisectoarei unghiului *DEF*.

b) În pătratul *ABCD*, *M* este mijlocul laturii [*AB*] și $N \in (AD)$ astfel încât $AN = 2DN$. Perpendiculara în *M* pe *CM* şi perpendiculara în *N* pe *CN* se intersectează în *Q*. Arătaţi că punctele *A, Q* şi *C* sunt coliniare.

P 3. Dacă ABC este un triunghi în care $[AB] \equiv [AC],\ D \in (BC),\ [BD] \equiv [CD],\ E \in (BC),\ E \neq D,$ $F \in AC$ și $AE \parallel BF$ arătați că $BC \cdot BF > 4AD \cdot BE.$

P 4. Fie **A** o mulțime de 5 numere naturale și $S = \{x+y \mid x,\ y \in A\}$. Să se arate că dacă mulțimea S are 9 elemente atunci suma numerelor din mulțimea A este divizibilă cu 5.

Succes

Barem de notare: **P1.** a) 3 puncte; b) 2 puncte; c) 2 puncte. **P2.** a) 4 puncte; b) 3 puncte. **P3.** 7 puncte. **P4.** 7 puncte.