Călăraşi 2013

Problema 1. Dacă U, V, W, X, Y, Z sunt şase puncte situate pe un cerc, punctele de intersecţie a perechilor de drepte (UV, XY), (VW, YZ), (WX, ZU) se află pe o dreaptă, numită dreapta Pascal a hexagramei (U, V, W, X, Y, Z). Să se arate că, dacă A, a, B, b, C, c sunt şase puncte situate pe un cerc, atunci dreptele Pascal ale hexagramelor (A, a, B, b, C, c), (A, b, B, c, C, a), (A, c, B, a, C, b) sunt concurente.

Problema 2. Fie a, b, c şi n patru numere întregi, unde $n \geq 2$, şi p un număr prim care divide numerele $a^2 + ab + b^2$ şi $a^n + b^n + c^n$, dar nu divide suma $a + b + c$. Să se arate că numerele n şi $p - 1$ nu sunt coprime.

Problema 3. Să se arate că, oricare ar fi numărul întreg $r \geq 2$, există un graf r-cromatic care nu are cicluri de lungime strict mai mică decât 6.

(Un graf se numeşte r-*cromatic*, dacă r este numărul minim de culori necesare colorării vârfurilor, astfel încât oricare două vârfuri adiacente să aibă culori diferite.)

Problema 4. Să se arate că există o submulţime proprie nevidă S a mulţimii numerelor reale, astfel încât, oricare ar fi numărul real x, familia de mulţimi

$$S, \quad x + S, \quad 2x + S, \quad \ldots, \quad nx + S, \quad \ldots$$

este finită, unde $kx + S = \{kx + s \mid s \in S\}$, $k \in \mathbb{N}$.