Danube Mathematical Competition

Călăraşi, 2 noiembrie 2013

Problema 1. Determinaţi numerele naturale $n \geq 2$ pentru care există $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}^*$ astfel încât

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n} = 0.$$

Problema 2. Se consideră 64 numere naturale distincte, cel mult egale cu 2012. Arătaţi că se pot alege patru numere dintre acestea, notate a, b, c, d, astfel încât $a + b - c - d$ să fie multiplu de 2013.

Problema 3. Determinaţi numerele naturale m, n astfel încât $85^m - n^4 = 4$.

Problema 4. Se consideră dreptunghiul $ABCD$, cu $AB \neq BC$, cu centrul în punctul O. Perpendiculara în O pe dreapta BD intersectează dreptele AB şi BC în punctele E, respectiv F. Punctele M şi N sunt mijloacele segmentelor $[CD]$, respectiv $[AD]$. Demonstraţi că $FM \perp EN$.

Danube Mathematical Competition

Călăraşi, 2 noiembrie 2013

Problema 1. Determinaţi numerele naturale $n \geq 2$ pentru care există $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}^*$ astfel încât

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n} = 0.$$

Soluţie. Fie M mulţimea numerelor naturale n cu proprietatea din enunţ.

Se observă că $2p \in M$, pentru orice $p \geq 1$, relaţiile verificându-se, de exemplu, pentru $x_1 = x_2 = ... = x_p = 1$ şi $x_{p+1} = x_{p+2} = ...x_{2p} = -1$.

În plus, dacă $n \in M$ şi $x_1 + x_2 + ... + x_n = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n} = 0$, considerând $x_{n+1} = 1$ şi $x_{n+2} = -1$, atunci $n + 2 \in M$, deoarece

$$x_1 + x_2 + ... + x_n + x_{n+1} + x_{n+2} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_{n+2}} = 0.$$

Rămâne aşadar să aflăm care este cel mai mic număr impar care aparţine lui M.

Presupunând $3 \in M$, atunci există $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 0$. Se obţine $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 0$, relaţie care are loc doar dacă $x_1 = x_2 = 0$, contradicţie. Ca urmare, $3 \notin M$.

Vom căuta un exemplu pentru a arăta că $5 \in M$. Considerând $x_1 = x_2 = x_3 = -1$, rezultă $x_4 + x_5 = 3$ şi $x_4x_5 = 1$, cu soluţiile $x_{4,5} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

În concluzie, $M = \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 3\}$.

Problema 2. Se consideră 64 numere naturale distincte, cel mult egale cu 2012. Arătaţi că se pot alege patru numere dintre acestea, notate a, b, c, d, astfel încât $a + b - c - d$ să fie multiplu de 2013.

Soluţie. Numărul perechilor (a, b), cu $a < b$, care se pot forma cu cele 64 de numere este 2016; ele generează 2016 sume $a + b$ care dau 2016 resturi la împărţirea cu 2013.

Ca urmare, există două perechi diferite (a, b) şi (c, d) cu proprietatea că $a + b$ şi $c + d$ dau acelaşi rest la împărţirea cu 2013, deci $2013 \mid (a + b) - (c + d)$.

În plus, cele două perechi au ambele componente diferite, deoarece, presupunând, spre exemplu, $a = c$, atunci $2013 \mid b - d$, şi, cum $|b - d| \leq 2012$, rezultă $b = d$.

Problema 3. Determinaţi numerele naturale m, n astfel încât $85^m - n^4 = 4$.

Soluţie. $85^m = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2)$; n este impar; $(n^2 - 2n + 2,\ n^2 + 2n + 2) = 1$; $n = 1$ nu convine, în rest nu se poate ca $n^2 - 2n + 2 = 1$, deci $n^2 - 2n + 2 = 5^m$, $n^2 + 2n + 2 = 17^m$.

Atunci $(n-1)^2 = 5^m - 1$, $(n+1)^2 = 17^m - 1$; dar pentru $m > 1$ între $5^m - 1$ şi $17^m - 1$ sunt multe pătrate (9^m şi 16^m), deci $m = 1$, $n = 3$.

Problema 4. Se consideră dreptunghiul $ABCD$, cu $AB \neq BC$, cu centrul în punctul O. Perpendiculara în O pe dreapta BD intersectează dreptele AB şi BC în punctele E, respectiv F. Punctele M şi N sunt mijloacele segmentelor $[CD]$, respectiv $[AD]$. Demonstraţi că $FM \perp EN$.

Soluţie. Notăm cu P mijlocul segmentului $[BC]$ şi cu Q intersecţia dreptelor EO şi CD. Cum $[PM]$ este linie mijlocie în triunghiul BCD, rezultă că $PM \parallel BD$ şi $OQ \perp BD$,deci $QF \perp PM$. Deoarece $PC \perp MQ$, rezultă că punctul F este ortocentrul triunghiului MPQ, de unde se obţine $PQ \perp MF$. (1)

Pe de altă parte, patrulaterul $ENQP$ este paralelogram, deci $PQ \parallel EN$. (2)

Din relaţiile (1) şi (2) obţinem $FM \perp EN$.