

Language: Romanian

Day: 1



EGMO 2013

European Girls' Mathematical Olympiad

Miercuri, 10 aprilie 2013

Problema 1. Latura BC a triunghiului ABC este prelungită dincolo de C până în D , astfel ca $CD = BC$. Latura CA este prelungită dincolo de A până în E , astfel ca $AE = 2CA$.

Demonstrați că, dacă $AD = BE$, atunci triunghiul ABC este dreptunghic.

Problema 2. Determinați toate numerele întregi m pentru care un pătrat de dimensiuni $m \times m$ poate fi partiționat în cinci dreptunghiuri, ale căror laturi au lungimile $1, 2, 3, \dots, 10$ într-o ordine anume.

Problema 3. Fie n un număr întreg strict pozitiv.

- (a) Arătați că există o mulțime S formată din $6n$ numere întregi strict pozitive, două câte două distincte, astfel încât cel mai mic multiplu comun al oricăror două dintre elementele lui S este mai mic sau egal cu $32n^2$.
- (b) Demonstrați că orice mulțime T formată din $6n$ numere întregi strict pozitive, două câte două distincte, conține două elemente al căror cel mai mic multiplu comun este mai mare decât $9n^2$.

Language: Romanian

Day: 2



EGMO 2013

European Girls' Mathematical Olympiad

Joi, 11 aprilie 2013

Problema 4. Găsiți toate perechile de numere întregi strict pozitive a și b pentru care există trei numere întregi consecutive în care polinomul

$$P(n) = \frac{n^5 + a}{b}$$

ia valori întregi.

Problema 5. Fie Ω cercul circumscris triunghiului ABC . Cercul ω este tangent laturilor AC și BC , și este tangent interior cercului Ω în punctul P . Dreapta ℓ este paralelă la AB , intersectează interiorul triunghiului ABC și este tangentă la cercul ω în punctul Q .

Demonstrați că $\angle ACP = \angle QCB$.

Problema 6. Albă-ca-Zăpada și cei Șapte Pitici locuiesc în căsuța lor din pădure. În fiecare din 16 zile consecutive, unii dintre pitici muncesc în mina de diamante, în timp ce ceilalți merg la cules mure. Niciun pitic nu face ambele munci într-o aceeași zi. În oricare două zile diferite (nu necesar consecutive), cel puțin trei pitici au făcut fiecare ambele tipuri de muncă. Mai mult, în prima zi, toți cei șapte pitici au muncit în mina de diamante.

Demonstrați că, în una dintre aceste 16 zile, toți cei șapte pitici au fost la cules mure.