

Language: Romanian

Day: 1

EGMO | 2012
European Girls' Mathematical Olympiad

Joi, 12 aprilie 2012

Problema 1. Fie ABC un triunghi având punctul O ca centru al cercului său circumscris. Punctele D , E și F se află respectiv pe laturile BC , CA și AB , astfel încât dreapta DE este perpendiculară pe CO iar dreapta DF este perpendiculară pe BO . (De exemplu, punctul D se află pe dreapta BC , fiind situat între B și C pe acea dreaptă.)

Fie K centrul cercului circumscris triunghiului AFE . Demonstrați că dreptele DK și BC sunt perpendiculare.

Problema 2. Fie n un număr întreg strict pozitiv. Determinați cel mai mare număr întreg m cu proprietatea că un tablou cu m linii și n coloane poate fi umplut cu numere reale în așa fel încât pentru oricare două linii diferite $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ și $[b_1, b_2, \dots, b_n]$ următoarea relație este adevărată

$$\max(|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \dots, |a_n - b_n|) = 1.$$

Problema 3. Determinați toate funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care

$$f(yf(x+y) + f(x)) = 4x + 2yf(x+y)$$

pentru toți $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema 4. O mulțime A de numere întregi se zice *sumă-plină* dacă $A \subseteq A + A$, adică orice element $a \in A$ este suma unei perechi (nu neapărat unice) de elemente (nu neapărat distincte) $b, c \in A$. O mulțime A de numere întregi se zice *liberă-de-sume-zero* dacă 0 este singurul număr întreg care nu poate fi exprimat ca suma elementelor unei submulțimi finite nevide a lui A .

Există oare o mulțime sumă-plină liberă-de-sume-zero de numere întregi?

Language: Romanian

Day: 2



EGMO | 2012
European Girls' Mathematical Olympiad

Vineri, 13 aprilie 2012

Problema 5. Numerele întregi pozitive p și q sunt prime și satisfac

$$\frac{p}{p+1} + \frac{q+1}{q} = \frac{2n}{n+2}$$

pentru un anumit număr întreg pozitiv n . Determinați toate valorile posibile ale diferenței $q - p$.

Problema 6. Un număr infinit de persoane sunt înregistrate ca utilizatori pe rețeaua socială *Mutrăbook*. Unele perechi de utilizatori (diferiți) sunt înregistrate ca *prieteni*, dar fiecare persoană are cel mult un număr finit de prieteni. Fiecare utilizator are cel puțin un prieten. (*Relația de prietenie este simetrică; dacă A este prieten cu B, atunci și B este prieten cu A.*)

Fiecare persoană trebuie să-și desemneze unul dintre prieteni ca fiind *cel-mai-bun-prieten*. Dacă A îl desemnează pe B ca cel-mai-bun-prieten, nu urmează (din păcate) în mod necesar că și B l-a desemnat pe A ca cel-mai-bun-prieten. Cineva desemnat ca cel-mai-bun-prieten este numit *1-cel-mai-bun-prieten*. În general, dacă $n > 1$ este un număr întreg pozitiv, atunci un utilizator este un *n-cel-mai-bun-prieten* dacă a fost desemnat ca cel-mai-bun-prieten de către cineva care este el însuși un $(n - 1)$ -*cel-mai-bun-prieten*. O persoană care este un *k-cel-mai-bun-prieten* pentru toate numerele întregi pozitive k este numită *populară*.

- (a) Demonstrați că fiecare persoană populară este cel-mai-bun-prieten al (măcar) unei alte persoane populare.
- (b) Demonstrați că dacă persoanele ar fi putut avea infinit de mulți prieteni, atunci ar fi fost posibil ca o persoană populară să nu fi fost cel-mai-bun-prieten al niciunei alte persoane populare.

Problema 7. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic înscris în cercul Γ și având ortocentrul H . Fie K un punct pe cercul Γ , de cealaltă parte a lui BC decât A . Fie L simetricul lui K față de dreapta AB , și fie M simetricul lui K față de dreapta BC . Fie E al doilea punct de intersecție al cercului Γ cu cercul circumscris triunghiului BLM . Demonstrați că dreptele KH , EM și BC sunt concurente. (*Ortocentrul unui triunghi este punctul de intersecție a înălțimilor sale.*)

Problema 8. Un *cuvânt* este o secvență finită de litere dintr-un anumit alfabet. Un cuvânt se zice *repetitiv* dacă este o concatenare de cel puțin două sub-cuvinte identice (de exemplu, *ababab* și *abcabc* sunt repetitive, dar *ababa* și *aabb* nu sunt). Demonstrați că dacă un cuvânt are proprietatea că orice transpoziție a două litere adiacente îl transformă într-un cuvânt repetitiv, atunci toate literele sale sunt identice. (O transpoziție a două litere adiacente identice, care lasă cuvântul neschimbat, este și ea a fi considerată.)