

Concursul “Stelele Matematicii” 2012



Sâmbătă, 8 decembrie 2012, orele 09:30
Liceul Internațional de Informatică București

Proba Seniori

Problema 1. Numărul natural nenul N este zis *amiabil* dacă mulțimea $\{1, 2, \dots, N\}$ poate fi partiționată în perechi de elemente, fiecare pereche având suma elementelor sale un pătrat perfect. Demonstrați că există infinit de multe numere amiabile care sunt ele însele pătrate perfecte.

Problema 2. Fie o dreaptă ℓ în plan, și un punct $A \notin \ell$. Fie și $\alpha \in (0, \pi/2)$ fixat. Determinați locul geometric al punctelor Q din plan, pentru care există un punct $P \in \ell$ astfel încât $AQ = PQ$ și $\angle PAQ = \alpha$.

Problema 3. Fiind date numerele reale a, b, c , diferite două câte două, demonstrați că inegalitatea

$$\left| \frac{a}{b-c} \right| + \left| \frac{b}{c-a} \right| + \left| \frac{c}{a-b} \right| \geq 2$$

are loc, și determinați toate cazurile de egalitate.

Demonstrați că dacă impunem și condiția $a, b, c > 0$, atunci toate cazurile de egalitate dispar, dar valoarea 2 rămâne ca fiind cea mai bună constantă posibilă.

Problema 4. Celulele unui tablou dreptunghiular de dimensiuni $M \times n$ (cu M linii și n coloane) sunt colorate, fiecare cu una din două culori, astfel încât pentru orice două coloane numărul perechilor de celule situate pe o aceeași linie, și având o aceeași culoare, este mai mic decât numărul perechilor de celule situate pe o aceeași linie, dar având culori diferite.

i) Demonstrați că dacă $M = 2011$, atunci $n \leq 2012$ (un model pentru cazul extrem $n = 2012$ într-adevăr există, dar nu vi se cere să-l prezentați).

ii) Demonstrați că dacă $M = 2011 = n$, fiecare dintre culori apare de cel mult $1006 \cdot 2011$ ori, și de cel puțin $1005 \cdot 2011$ ori.

iii) Demonstrați că dacă însă $M = 2012$, atunci $n \leq 1007$.

Orice cerere de clarificare poate fi făcută oricând pe parcursul probei. Este permisă folosirea calculatoarelor de buzunar. Timp de lucru $4\frac{1}{2}$ ore.

Problemele nu sunt prezentate în mod necesar în ordinea dificultății - niciuna nu este trivială. Concizia și claritatea redactării vor fi luate în considerație. Încercați să nu folosiți mai mult de o coală de hârtie pentru fiecare problemă. Ciornele nu se remit. Fiecare problemă valorează **10** puncte.

★ ★ ★ **Mult SUCCES tuturor participanților!**