

Concursul “Stelele Matematicii” 2012

★ ★ ★
★ ★ ★
★ ★ ★

Sâmbătă, 8 decembrie 2012, orele 09:30
Liceul Internațional de Informatică București

Proba Juniori

Problema 1. Fie o dreaptă ℓ în plan, și un punct $A \notin \ell$. Determinați locul geometric al punctelor Q din plan, pentru care există un punct $P \in \ell$ astfel încât $AQ = PQ$ și $\angle PAQ = 45^\circ$.

Problema 2. Demonstrați că valoarea expresiei

$$\frac{\sqrt{n + \sqrt{0}} + \sqrt{n + \sqrt{1}} + \sqrt{n + \sqrt{2}} + \cdots + \sqrt{n + \sqrt{n^2 - 1}} + \sqrt{n + \sqrt{n^2}}}{\sqrt{n - \sqrt{0}} + \sqrt{n - \sqrt{1}} + \sqrt{n - \sqrt{2}} + \cdots + \sqrt{n - \sqrt{n^2 - 1}} + \sqrt{n - \sqrt{n^2}}}$$

este aceeași, oricare ar fi numărul natural nenul n .

Problema 3. Fiind date numerele reale a, b, c , diferite două câte două, demonstrați că inegalitatea (unde s-a folosit notația $|x| = \sqrt{x^2}$)

$$\left| \frac{a+b}{a-b} \right| + \left| \frac{b+c}{b-c} \right| + \left| \frac{c+a}{c-a} \right| \geq 2$$

are loc, și determinați toate cazurile de egalitate.

Demonstrați că dacă impunem și condiția $a, b, c \geq 0$, atunci

$$\left| \frac{a+b}{a-b} \right| + \left| \frac{b+c}{b-c} \right| + \left| \frac{c+a}{c-a} \right| > 3,$$

valoarea 3 fiind cea mai bună constantă posibilă.

Problema 4. Fie X o mulțime cu $|X| = n \geq 1$ elemente. O familie \mathcal{F} de submulțimi distincte ale lui X este zisă a avea proprietatea \mathcal{P} dacă există $A, B \in \mathcal{F}$ astfel încât $A \subset B$ și $|B \setminus A| = 1$.

i) Demonstrați că $m = 2^{n-1}$ este cea mai mică valoare, astfel încât orice familie \mathcal{F} cu $|\mathcal{F}| > m$ să aibă proprietatea \mathcal{P} .

ii) Găsiți toate familiile \mathcal{F} cu $|\mathcal{F}| = 2^{n-1}$, și care nu au proprietatea \mathcal{P} .

Orice cerere de clarificare poate fi făcută oricând pe parcursul probei. Este permisă folosirea calculatoarelor de buzunar. Timp de lucru $4\frac{1}{2}$ ore.

Problemele nu sunt prezentate în mod necesar în ordinea dificultății - niciuna nu este trivială. Concizia și claritatea redactării vor fi luate în considerație. Încercați să nu folosiți mai mult de o coală de hârtie pentru fiecare problemă. Ciornele nu se remit. Fiecare problemă valorează **10** puncte.

★ ★ ★ **Mult SUCCES tuturor participanților!**