MATHMOISELLE: concurs de matematică în limbi moderne, ediţia a VII-a, 02.06.2016

Clasa a IX-a /M1

Nume şi prenume elev:

Probleme numerice

1. Dacă $(a_n)_{n\in N}$ este o progresie aritmetică cu $a_1+a_{2017}=2017$, atunci a_{1009} are valoarea:

$a)\,2017 \quad b)\,1009 \quad c)\,\frac{2017}{2} \quad d)\,\frac{1009}{2}$

2. Produsul soluţiilor ecuaţiei $\left[\frac{x-1}{2}\right]=\frac{x+3}{3}$ este:

a) 135 b)9 c)108 d) 1620

3. Fie mulțimea $M=\{\cos 1^\circ\cdot\sin 1^\circ,\cos 3^\circ\cdot\sin 3^\circ,...,\cos 179^\circ\cdot\sin 179^\circ\}$. Dacă a este cel mai mic și b este cel mai mare element al mulțimii, atunci acestea sunt:

a) $a=b=0$ *b)* $a=-\frac{1}{2},\mathrm{b}=\frac{1}{2}$ *c)* $a=-1,b=1$ *d)* $a=-\frac{\sqrt{2}}{2},\mathrm{b}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Probleme de logică

1. Numărul diagonalelor unui poligon convex cu 2016 vârfuri este:

$a)\,1008\cdot 2013 \quad b)\,1008 \quad c)\,2016\cdot 2015 \quad d)\,2016\cdot 2013$

2. Criptologia este știința scrierilor secrete, având drept obiect apărarea secretului datelor, a informațiilor confidențiale, cu ajutorul sistemelor criptografice. Unul dintre cele mai simple sisteme are la bază algoritmul de cifrare al lui Cezar (bine-cunoscutul împărat roman): textul clar este construit cu literele alfabetului latin *A, B, ..., Z*, iar *cheia* de cifrare este reprezentată de un număr întreg $k\in\{1,2,3,...,26\}$. Fiecărei litere din textul sursă i se asociază ordinea lexicografică x, apoi, pentru cifrare, aceasta se înlocuiește prin caracterul cod $(x+k)\bmod 26$ (prin $\bmod 26$ se ia restul împărțirii lui $x+k$ la 26). De exemplu, cuvântul *MATEMATICA* se cifrează, folosind acest algoritm, cu cheia $k=9$, astfel: literei *M* îi corespunde $x=13$, așadar se va cifra în $(13+9)\bmod 26=22$ și se va continua analog, ajungându-se la *VJCNVJCRLJ.* Folosind acest algoritm, cu cheia $k=10$, criptați mesajul *MATHMOISELLE.*

a) *VLOAVYCRUJJU* *b)* *WKDRWYSCOVVO* *c)* *ZWTSZJIASDDS* *d)* *WKDRYWSCOVVO*

3. Fie predicatul $p(x,y): x^2-20x+100+y^2=0, x,y\in R$. Stabiți care dintre următoarele propoziții este adevărată:

a) $(\exists)x, (\exists)y, p(x,y)$ b) $(\forall)x, (\forall)y, p(x,y)$
c) $(\forall)x, (\exists)y, p(x,y)$ d) $(\exists)x, (\forall)y, p(x,y)$

Aplicaţii practice

1. Fie un cub cu latura de 3 pe care îl împărțim în 27 de cubulețe egale. O furnică dorește să parcurgă toate cubulețele mici, cu excepția celui din mijlocul cubului, astfel încât să poată traversa două cuburi vecine prin muchii și nu prin vârfuri. Numărul maxim de cubulețe pe care poate să îl parcurgă este de:

$a)26$ $b)25$ $c)27$ $d)23$

2. Dan privește un stol de păsări. În fiecare minut, din stol se dăpărtează câteva păsări, iar altele vin și le iau locul. Dan le numără de fiecare dată și găsește o regulă. Pleacă cel mai mare număr natural mai mic de 10% din numărul lor și vin altele 5. Știind că la început în stol erau 20 de păsări, Dan spune că după 10 minute vor fi:

a) 40 *b)* 42 *c)* 39 *d)* 43

3. În Teoria Stringurilor, Universul nostru se află pe o membrană infinită în lungime, dar foarte îngustă, astfel încât ea poate fi aproximată cu o sfoară, iar această membrană este situată între o multitudine de membrane paralele. Unii oameni de știință afirmă că aceste membrane vibrează după anumite legi, iar ciocnirea dintre membrana ce conține universul nostru și cea a unui univers paralel a dus la Big Bang. Care din funcțiile $f:[0,\infty)\to R$ următoare poate fi cea după care vibrează membrana Universului în care ne găsim?

a) $f(x)=\cos x$ b) $f(x)=2x+1$ c) $f(x)=\{x\}$ d) $f(x)=[x]$

MATHMOISELLE: concurs de matematică în limbi moderne, ediţia a VII-a, 02.06.2016

Clasa a IX-a /M2

Nume şi prenume elev:

Probleme numerice

1. Calculând $S=\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4\cdot 2016-3)\cdot(4\cdot 2016+1)}$ se obține :

$a)\frac{2015}{2016}$ $b)\frac{1}{8061}$ $c)\frac{8064}{8061}$ $d)\frac{2016}{8065}$

2. Funcția $f:R \to R$, care verifică relația $3f(x)-2f(2-x)=10x-7, (\forall)\ x\in R$, este:

a) $f(x)=10x-7$ b) $f(x)=7-10x$ c) $f(x)=2x+1$ d) $f(x)=3x-2$

3. Rezultatul calculului $(1+2)\cdot(1+2^2)\cdot(1+2^4)\cdot\ldots\cdot\left(1+2^{2^{10}}\right)$ este:

a) $2^{2^{20}}+1$ *b)* $2^{2^{20}}-1$ *c)* $2^{2^{11}}+1$ *d)* $2^{2^{11}}-1$

Probleme de logică

1. Emil îşi testează maşina cea nouă. El parcurge distanţa de 60 km dintre Bucureşti şi Ploieşti cu viteza medie de 60 km/h, iar distanţa de aproximativ 240 km dintre Ploieşti şi Sibiu cu viteza medie de 80 km/h. Care este viteza medie cu care s-a deplasat de la Bucureşti la Sibiu?

   $a)75\ km/h$ $b)72,5km/h$ $c)80km/h$ $d)73,75km/h$

2. Andrei studiază un stol de porumbei. În fiecare minut 10% din porumbei părăsesc stolul și 30% din porumbei revin în stol. Dacă p_n este numărul de porumbei la sfârșitul a n minute, atunci relația de recurență este:

   a) $p_{n+1}=1{,}2p_n$ b) $p_{n+1}=0{,}5p_n+20$

   c) $p_{n+1}=0{,}9p+2$ d) $p_{n+1}=0{,}8p_n$

3. Considerăm mulţimile: $M_1=\{1\}, M_2=\{2,3\}, M_3=\{4,5,6\}, M_4=\{7,8,9,10\}\ldots$ şi aşa mai departe. Care este cel mai mare element din mulţimea M_{2016} ?

   $a)1008\cdot 2017$ $b)201600$ $c)1008$ $d)1008\cdot 2015$

Aplicaţii practice

1. Un amfiteatru are 39 de locuri în al doilea rând, 42 de locuri în al treilea rând și așa mai departe. Dacă numerele de locuri de pe rânduri sunt în progresie aritmetică, aflați câte locuri sunt pe cel de-al 17-lea rând al amfiteatrului.

   a) 102 ; b) 104 ; c) 84 ; d) 95

2. Criptologia este știința scrierilor secrete, având drept obiect apărarea secretului datelor, a informațiilor confidențiale, cu ajutorul sistemelor criptografice. Unul dintre cele mai simple sisteme are la bază algoritmul de cifrare al lui Cezar (bine-cunoscutul împărat roman): textul clar este construit cu literele alfabetului latin *A, B, ..., Z*, iar *cheia* de cifrare este reprezentată de un număr întreg $k \in \{1, 2, 3, ..., 26\}$. Fiecărei litere din textul sursă i se asociază ordinea lexicografică x, apoi, pentru cifrare, aceasta se înlocuiește prin caracterul cod $(x+k) \bmod 26$ (prin $\bmod 26$ se ia restul împărțirii lui $x+k$ la 26). De exemplu, cuvântul *MATEMATICA* se cifrează, folosind acest algoritm, cu cheia $k=9$, astfel: literei *M* îi corespunde $x=13$, așadar se va cifra în $(13+9) \bmod 26 = 22$ și se va continua analog, ajungându-se la *VJCNVJCRLJ.* Folosind acest algoritm, cu cheia $k=10$, criptați mesajul *MATHMOISELLE.*

a) *VLOAVYCRUJJU* *b)* *WKDRWYSCOVVO* *c)* *ZWTSZJIASDDS* *d)* *WKDRYWSCOVVO*

3. Mihai participă cu o lucrare la o expoziție. Pentru aceasta ia un disc de lemn și îl taie în 12 sectoare ale căror arii sunt în progresie aritmetică. Apoi așază sectoarele obținute unul peste altul, în ordine descrescătoare. Observă că aria celui mai mare sector este dublul ariei celui mai mic sector și se întreabă care este măsura în grade a unghiului corespunzător celui mai mic sector.

a) 30° *b)* 20° *c)* 10° *d)* 15°.