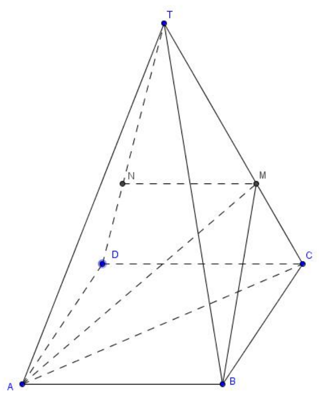
Concursul Interjudeţean
"Matematica, de drag"
Ediţia a VIII - a, Bistriţa
22 - 24 noiembrie 2013

Clasa a IX -a

Barem de corectare şi notare

Subiectul I.

Se dă piramida patrulateră regulată $TABCD$ de volum $a,\ a > 0$. Să se determine volumul piramidei $TABMN$, unde M şi N sunt puncte situate pe TC şi respectiv TD astfel încât $\frac{MC}{TC} = \frac{ND}{TD} = \frac{1}{3}$.
Soluţie. Figura 0.5p



Deoarece piramidele $TABC$ şi $MABC$ au aceeaşi bază ABC, avem:
$\frac{V_{MABC}}{V_{TABC}} = \frac{d(M,\, ABC)}{d(T,\, ABC)} = \frac{MC}{TC} = \frac{1}{3}$ 1p
de unde
$V_{MABC} = \frac{1}{3}V_{TABC} = \frac{1}{6}V_{TABCD} = \frac{a}{6}$ 1p
Piramidele $ATCD$ şi $ACMND$ au aceeşi înălţime, distanţa de la A la planul (TCD) 1p
Rezultă:
$\frac{V_{ACMND}}{V_{ACDT}} = \frac{S_{CMND}}{S_{TDC}}$ 0.5p

Dar $\frac{S_{TNM}}{S_{TDC}} = \frac{NT}{TD}\frac{TM}{TC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ 0.5p
De unde $S_{TNM} = \frac{4}{9}S_{TDC}$ şi $S_{CMND} = S_{TDC} - \frac{4}{9}S_{TDC} = \frac{5}{9}S_{TDC}$ 1p
Atunci $\frac{V_{ACMND}}{V_{ATCD}} = \frac{5}{9}$ 0.5p
de unde $V_{ACMND} = \frac{5}{9}V_{ACTD} = \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2}V_{TABCD} = \frac{5}{18}V_{TABCD} = \frac{5}{18}a$ 0.5p
În final:
$V_{TABMN} = V_{TABCD} - V_{MABC} - V_{ACMND} = a - \frac{a}{6} - \frac{5}{18}a = \frac{5}{9}a$ 0.5p

Subiectul II.

Să se demonstreze că:

$$\frac{1}{\sqrt{672}} < \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{9}{10} \cdot \ldots \cdot \frac{2013}{2014} < \sqrt{\frac{2017}{2688}}$$

Soluţie: Deoarece $\frac{3n+1}{3n+3} < \frac{3n}{3n+1}$ 1p

pentru $n \in \{1,\ 2,\ ...,\ 671\}$, găsim:

$\frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{10}{12} \cdot \ldots \cdot \frac{2014}{2016} < \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{9}{10} \cdot \ldots \cdot \frac{2013}{2014}$ 1p

sau:

$\frac{4}{3} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{10}{9} \cdot \ldots \cdot \frac{2014}{2013} \cdot \frac{3}{2016} < \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{9}{10} \cdot \ldots \cdot \frac{2013}{2014}$ 1p

şi dacă notăm $E = \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{9}{10} \cdot \ldots \cdot \frac{2013}{2014}$ avem: $\frac{1}{E} \cdot \frac{1}{672} < E$, de unde $E > \frac{1}{\sqrt{672}}$ 1p

Pentru partea dreaptă a inegalităţii folosim $\frac{3n}{3n+1} < \frac{3n+4}{3n+3}$, $n \in \{1,\ 2,\ ...,\ 671\}$ 1p

de unde:

$\frac{3}{4} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{9}{10} \cdot \ldots \cdot \frac{2013}{2014} < \frac{7}{6} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{13}{12} \cdot \ldots \cdot \frac{2017}{2016}$ 0.5p

De aici: $E < \frac{4}{3} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{10}{9} \cdot \ldots \cdot \frac{2014}{2013} \cdot (\frac{3}{4} \cdot \frac{2017}{2016}) = \frac{1}{E} \cdot \frac{2017}{2688}$ 1p

şi în final $E < \sqrt{\frac{2017}{2688}}$ 0.5p

Subiectul III. Fie $p \in \mathbb{N}^*$; arătaţi că numărul

$$n^4 + (4p+1)n^2 + 4p^2 + 4p + 3$$

nu poate fi scris ca suma a două numere prime, oricare ar fi numărul natural n.

Soluţie:

Presupunem că există numerele prime p_1 şi p_2 aşa încât:

(1) $n^4 + (4p+1)n^2 + 4p^2 + 4p + 3 = p_1 + p_2$ 1p

Din (1) avem

(2) $(n^2 + 2p)(n^2 + 2p + 1) + 2p + 3 = p_1 + p_2$ 0.5p

Cum $(n^2 + 2p)(n^2 + 2p + 1)$ este par,fiind produs de douạ numere naturale consecutive, şi $2p + 3$ este impar, din (2) deducem că $p_1 + p_2$ este impar 1p

Rezultă că p_1 sau p_2 este egal cu 2 .... 0.5p

Fie $p_1 = 2$; din (1) obţinem:

$(n^2 + 2p + 1)^2 - n^2 = p_2$ 0.5p

sau

$(n^2 - n + 2p + 1)(n^2 + n + 2p + 1) = p_2$ 0.5p

Pentru $n \in \mathbb{N}$ avem

$n^2 - n + 2p + 1 \geq 2p + 1$ şi $n^2 + n + 2p + 1 \geq 2p + 1$ 1p

ceea ce arată că p_2 este un număr compus 0.5p

Contradicţie cu faptul că p_2 este prim 0.5p

Aşadar, numărul din enunţ nu poate fi scris ca o sumă de două numere prime pentru orice $p \in \mathbb{N}^*$ şi $n \in \mathbb{N}$ 1p