Concursul Interjudeţean
"Matematica, de drag"
Ediţia a VIII - a, Bistriţa
22 - 24 noiembrie 2013

Clasa a VIII-a

Subiectul I

a) Fie n un număr natural. Determinaţi n, dacă $n+49$ şi $n-49$ sunt cuburi perfecte.

G.M. 6-7-8, 2013, Aurel Doboşanu

b)Calculaţi $a=\sqrt{1+2010\cdot\sqrt{1+2011\cdot\sqrt{1+2012\cdot\sqrt{1+2013\cdot 2015}}}}$.

Cătălin Budeanu

Barem de corectură şi notare:

a) Fie $n+49=a^3$ şi $n-49=b^3$, unde $a\in\mathbb{N}$ şi $b\in\mathbb{Z}$

Avem $a^3-b^3=98 \Leftrightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2)=98$ (1).. 1p

Cum $a>b$ din (1) rezultă $a-b\in\{1,2,7,14,49,98\}$

$a-b=1 \Rightarrow a=b+1$ şi $(b+1)^2+b(b+1)+b^2=98 \Leftrightarrow 3b^2+3b=97 \Rightarrow 3|97$, fals

$a-b=2 \Rightarrow (b+2)^2+b(b+2)+b^2=49 \Leftrightarrow b^2+2b=15 \Leftrightarrow (b+1)^2=16$, de unde $b=3$ şi $a=5$. 1p

$a-b\geq 7$, adică $a\geq b+7$ conduce la $a^2+ab+b^2\leq 14$ fals 1p

Deci $a=5, b=3$ şi $n+49=125$, adică $n=76$.. 1p b)

$\sqrt{1+2013\cdot 2015}=\sqrt{1+2013^2+2\cdot 2013}=\sqrt{(1+2013)^2}=2014$.. 1p

$\sqrt{1+2012\cdot 2014}=\sqrt{(1+2012)^2}=2013$ 1p

$\sqrt{1+2011\cdot 2013}=2012$.. 1p

$a=\sqrt{1+2010\cdot 2012}=2011$.. 1p

Subiectul II

Fie numerele reale $x,\ y,\ z$ pentru care au loc simultan relaţiile:

(i) $x+y+z=-a$

(ii) $xy+yz+zx=\frac{a^2+4a+11}{2}$

a) Găsiţi o relaţie independentă de a între $x,\ y$ şi z.

b) Stabiliţi cărui interval de lungime, cu extremită ţile numere întregi, aparţine fiecare dintre numerele x, y, z.

Barem de corectură şi notare:

a) $xy+yz+zx=\frac{a^2+4a+11}{2}=\frac{(x+y+z)^2-4(x+y+x)+11}{2}$ 2p

b) Relaţia precedentă se mai scrie sub forma echivalentă

$(x+y+z)^2-4(x+y+z)+11=2xy+2yz+2zx \Leftrightarrow$.. 1p

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-4x-4y-4z+11=0$ 1p

$(x^2-4x+4)+(y^2-4y+4)+(z^2-4z+4)=1 \Leftrightarrow$ 1p
$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=1 \Rightarrow$ 1p
$\Rightarrow (x-2),\ (y-2),\ (z-2) \in [-1,1] \mid +2$
$\Rightarrow x,\ y,\ z \in [1,3]$ 1p

Subiectul III

Prin vârfurile A, B, D şi E ale hexagonului regulat $ABCDEF$ se consideră respectiv, dreptele a, b, d şi e astfel încât $a||b||d||e||a$. De aceeaşi parte a planului (ABC) pe dreptele a, b şi d se iau respectiv, punctele A', B' şi D' astfel încât lungimile segmentelor $[AA']$, $[BB']$ şi $[DD']$ exprimate în unităţi de lungime sunt egale cu: $AA'=2^{2012}+2^{2011}+2^{2010}$, $BB'=2^{2013}$ şi $DD'=2^{2010}$. Dacă planul $(A'B'D')$ intersectează dreapta e în punctul E', aflaţi distanţa dintre punctele E şi E'.

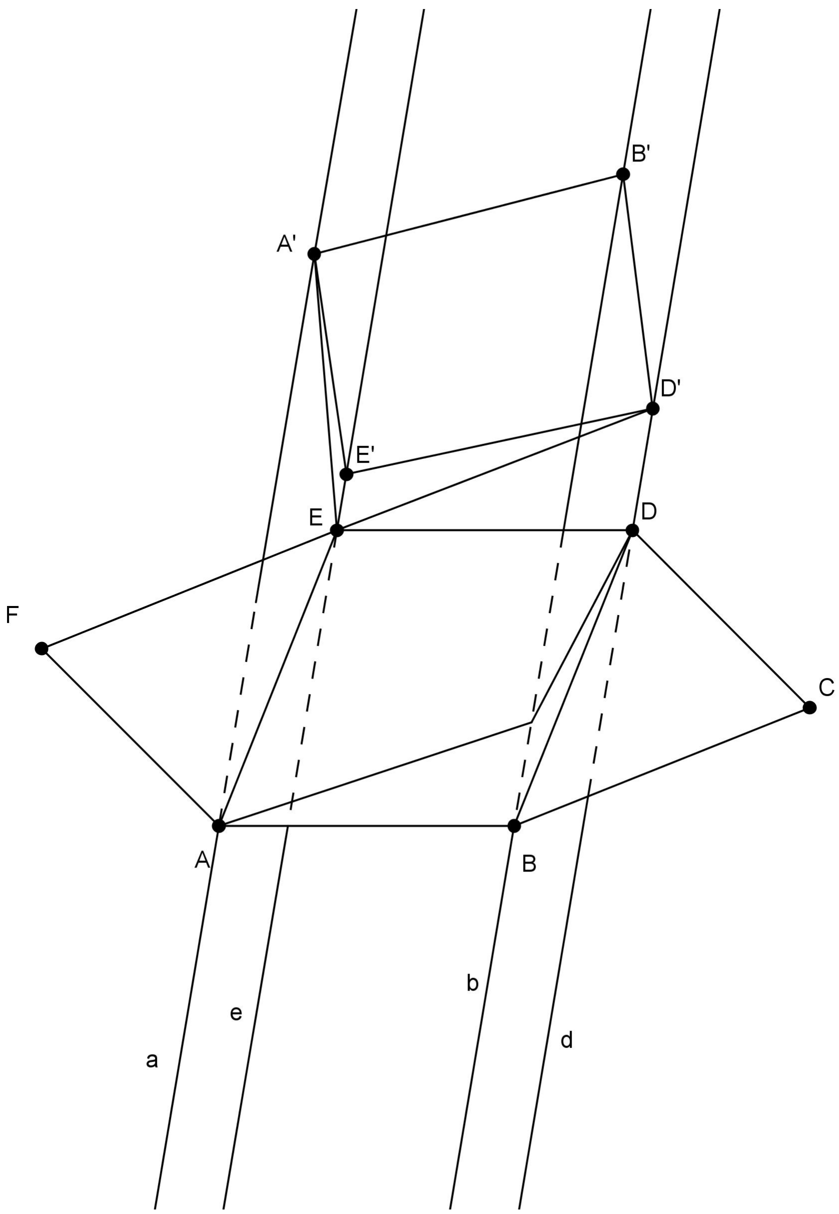
Barem de corectură şi notare:

Soluţia 1

Se arată că patrulaterul $A'B'D'E'$ este paralelogram, de unde $E'D'||A'B'$ (1) 1p
Fie punctul $M \in (BB')$, astfel încât $(MB)=(DD')(=2^{2010})$.
Observăm că $2^{2013}=2^{2010}+(2^{2010}+2^{2011}+2^{2012})$, de unde rezultă că $BB'=AA'+DD'$ 1p
Patrulaterul $MBDD'$ este paralelogram pentru că $MB||DD'$ şi $MB=DD'$. Deci $BD||MD'$ şi $MB=DD'$. Deci $BD||MD'$ şi $BD=MD'$ 1p
Însă $BD||AE$ şi $BD=AE(ABDE$ este dreptunghi).
Deci $MD'||AE$ şi $MD'=AE$, adică $AMD'E$ este paralelogram de unde $AM||D'E$ (2) 1p
Din $AA'=MB'$ şi $AA'||MB'$ rezultă că şi $AMB'A'$ este paralelogram, de unde $AM||A'B'(3)$ 1p
Din (2) şi (3) rezultă că $D'E||A'B'$ (4) 1p
Din (1) şi (4), rezultă $E=E'$(axioma paralelor) şi $d(E,E')=0$ 1p

Soluţia 2

Fie $B'D' \cap BD=\{M\}$, $A'D' \cap AD=\{N\}$ şi $AB \cap A'B'=\{P\}$
Avem $(A'B'D') \cap (ABD)=MN$, deci $P \in MN$ 1p
Arătăm că $E \in MN$, adică $e \cap (A'B'D')=\{E\}$
$\triangle MDD' \sim \triangle MBB'$, $\triangle NDD' \sim \triangle NAA'$ şi $\triangle PAA' \sim \triangle PBB'$(t.f.a) de unde $\frac{MD}{MB}=\frac{1}{8}$; $\frac{PA}{PB}=\frac{7}{8}$. 2p
Patrulaterul ABDE este dreptunghi cu $AE=AB\sqrt{3}$ 1p
Din $\frac{PA}{PB}=\frac{7}{8} \Rightarrow PA=7AB$ şi din $\frac{MD}{MB}=\frac{1}{8}$ rezultă $MB=\frac{8\sqrt{3}}{7}AB$ 1p
Avem $tg(\widehat{APE})=\frac{AE}{AP}=\frac{\sqrt{3}}{7}$ şi $tg(\widehat{MPB})=\frac{\sqrt{3}}{7}$ 1p
Deci $\widehat{APE} \equiv \widehat{MPB}$ şi $E \in MN$ iar $E=E'$ 1p


B'
A'
D'
E'
E
D
F
C
A
B
b
e
a
d