Concursul Interjudeţean
"Matematica, de drag"
Ediţia a VIII - a, Bistriţa
22 - 24 noiembrie 2013

Clasa a VII-a

Subiectul I

Determinaţi $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $m^m = m! + 232$, unde $m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot m$.

Barem de corectură şi notare:

$m \leq 3 \ \Rightarrow m^m < 232$ "nu convine" 1p
$m = 4 \ \Rightarrow 4^4 = 4! + 232$ soluţie 1p
$m \geq 5 \ \Rightarrow m^m = m! + 2^3 \cdot 29$, de unde $m | 2^3 \cdot 29$,
adică $m \in \{8,\ 29,\ 58,\ 116,\ 232\}$ 1p
$m = 8$ conduce la $8^8 = 8! + 2^3 \cdot 29$, de unde
$8^7 = 7! + 29$, fals pentru că 7! este par 1p
$m = 29$ conduce la $29^{29} = 29! + 8$, de unde $2|29$, fals 1p
$m = 116$ conduce la $116^{116} = 116! + 232$, de unde $116^{115} = 115! + 2$ şi $4|2$, contracdicţie! 1p
$m = 232$ conduce la $232^{232} = 232! + 232$, de unde $232^{231} = 231! + 1$ şi $2|1$, fals 1p
Prin urmare, $m = 4$.

Subiectul II

Determinaţi cel mai mic număr raţional pozitiv r pentru care numerele $\frac{28}{45} \cdot r$ şi $\frac{98}{75} \cdot r$ sunt ambele naturale.

Barem de corectură şi notare:

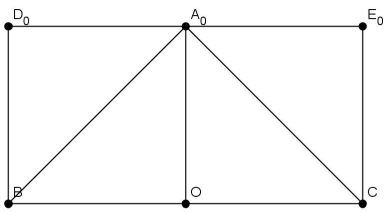
Fie $r = \frac{a}{b}$ cu $a,\ b \in \mathbb{N}^*$ şi $(a, b) = 1$
Avem $\frac{28}{45} r = \frac{28}{45} \cdot \frac{a}{b} \in \mathbb{N}$, de unde $45b | 28a$ şi $45 | 28a$ şi $b | 28a$ (1) 1p
Cum $(45, 28) = 1$, iar $(a, b) = 1$ din (1) rezultă că $45|a$ şi $b|28$ (2p) 1p
Din $\frac{98}{75} r = \frac{98}{75} \cdot \frac{a}{b}$ rezultă că $75b | 98a$ (3) 1p
Însă $(75, 98) = 1$ şi $(a, b) = 1$, atunci din (3) rezultă că $75|a$ şi $b|98$ (4) 1p
Cum $\frac{a}{b}$ trebuie să fie minim rezultă că a trebuie să fie minim posibil, iar b maxim posibil 1p
Din (2) şi (4) rezultă $a = [45, 75] = 225$ şi $b = (28, 98) = 14$ 1p
Prin urmare, $r_{min} = \frac{225}{14}$ 1p

Subiectul III

Se consideră punctele fixe B şi C, iar punctul A oarecare (variabil) nesituat pe dreapta BC. În exteriorul triunghiului ABC se construiesc triunghiurile dreptunghice isoscele ACE şi ABD cu $m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{AEC}) = 90^o$. Arătaţi că mediatoarele segmentelor (DE) trec printr-un punct fix(printr-un acelaşi punct).

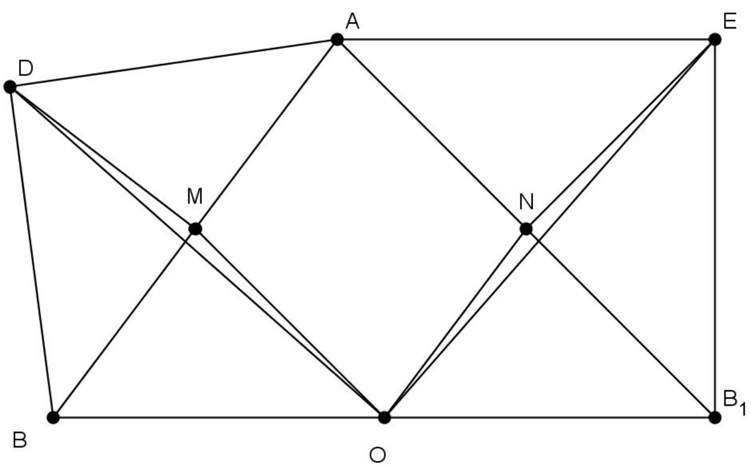
Barem de corectură şi notare:

Observaţie: Pentru a "intui" punctul fix prin care trec mediatoarele segmentelor variabile (DE), să



construim punctul A_0 astfel încât triunghiul A_0BC să fie dreptunghic isoscel, cu $m(\widehat{BA_0C}) = 90^o$. Atunci mediatorea segmentului (D_0E_0) conţine punctul O, mijlocul segmentului fixat (BC) pentru că BCE_0D_0 este dreptunghi.

Fie punctele M, N şi O mijloacele laturilor (AB), (AC)şi respectiv (BC).



Avem $ON = \frac{AB}{2}$; $OM = \frac{AC}{2}$(teorema liniei mijlocii) 1p

$ANOM$ este paralelogram, de unde $m(\widehat{AMO}) = m(\widehat{ANO})$ şi $m(\widehat{BMO}) = m(\widehat{CNO}) = m(\widehat{ABC})$

$m(\widehat{DMB}) = m(\widehat{ENC}) = 90^o$

Deci $m(\widehat{DMO}) = m(\widehat{ENO})$ 2p

$DM = \frac{AB}{2}$ şi $NE = \frac{AC}{2}$(mediana corespunzătoare unghiului drept) 091p

$\triangle OMD \equiv \triangle ONE$(L.U.L), de unde $(OD) \equiv (OE)$, adică $\triangle DOE$ este isoscel, oricare ar fi punctul

$A \notin BC$ 2p

Mediatoarea laturii DE conţine punctul fix O 1p