Concursul Interjudeţean
"Matematica, de drag"
Ediţia a VIII - a, Bistriţa
22 - 24 noiembrie 2013

Clasa a V-a

Subiectul I.

Găsiţi numerele naturale a şi b pentru care: $63a^3 + 78b^2 = 2013$.

Barem de corectură şi notare:

Avem: $63a^3 + 78b^2 = 2013 \mid : 3 \iff 21a^3 + 26b^2 = 671$ (1)

Cum $21 \cdot 3^3 = 567$ şi $21 \cdot 4^3 = 1344$, din (1) rezultă că $a \leq 3$ 2p

Tot din (1) rezultă că a este impar.

Deci $a \in \{1, 3\}$ 1p

$a = 1$, conduce la $b = 5$ 2p

$a = 3$ conduce la $b = 2$ 2p

Subiectul II

Se numeşte număr "împerecheat" un număr natural scris în baza zece care are patru cifre şi este format din două perechi de cifre egale (exemple: 5577, 7755, 5555, 5757, etc.).

a)Găsiţi două numere "împerecheate" care au suma 2011.

b)Dacă se aşază într-un şir toate numerele "împerecheate" în ordine crescătoare, aflaţi primii patru şi ultimii patru termeni ai şirului.

c)Câte numere "împerecheate" există? Justificaţi răspunsul!

Barem de corectură şi notare:

a) $1001 + 1010 = 2011$ 1p

b) $1001,\ 1010,\ 1100, 1111,\ ...; 9966,\ 9977,\ 9988,\ 9999$ 2p

c) Numerele sunt formate cu cifrele a şi b, unde a şi b sunt nenule şi distincte.

Avem 6 numere împerecheate formate cu cifrele a şi b: $\overline{aabb}$, $\overline{abab}$, $\overline{abba}$, $\overline{bbaa}$, $\overline{baba}$, $\overline{baab}$.

Dacă $a = 1$ şi $b \in \{2, 3, ..., 9\}$ avem $8 \cdot 6 = 48$ numere împerecheate.

Dacă $a = 2$ şi $b \in \{3, 4, ..., 9\}$ avem $7 \cdot 6 = 42$ numere împerecheate.

Dacă $a = 3$ şi $b \in \{4, 5..., 9\}$ avem $6 \cdot 6 = 36$ numere împerecheate.

Dacă $a = 4$ şi $b \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$ avem $6 \cdot 5 = 30$ numere împerecheate.

Dacă $a = 5$ şi $b \in \{6, 7, 8, 9\}$ avem $6 \cdot 4 = 24$ numere împerecheate.

Dacă $a = 6$ şi $b \in \{7, 8, 9\}$ avem $6 \cdot 3 = 18$ numere împerecheate.

Dacă $a = 7$ şi $b \in \{8, 9\}$ avem $6 \cdot 2 = 12$ numere împerecheate.

Dacă $a = 5$ şi $b = 9$ avem $6 \cdot 1 = 6$ numere împerecheate.

În total avem $6 \cdot (1 + 2 + ... + 8) = 6 \cdot 8 \cdot 9 : 2 = 216$ numere împerecheate 2p

II

Dacă $a = b$ atunci numerele sunt de forma $\overline{aaaa}$, unde $a \in \{1, 2, ..., 9\}$ şi atunci vor fi 9 numere împerecheate . . . 1p

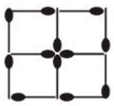
III

Dacă $b=0$ atunci numerele împerecheate vor fi de forma $\overline{aa00}, \overline{a0a0}$ şi $\overline{a00a}$, unde $a \in \{1,2,3,...,9\}$ şi vor mai fi $3 \cdot 9 = 27$ numere împerecheate.

în total avem $216+9+27=252$ numere împerecheate . . . 1p

Subiectul III

Cu 12 chibrituri construim un pătrat 2x2 care conţine $2^2 = 4$ pătrăţele mici(ca în figura alăturată). Câte chibrituri sunt necesare pentru a construi un pătrat $100X100$ care să conţină $100^2 = 10000$ de pătrăţele mici? Justificaţi răspunsul!



Barem de corectură şi notare:

De fiecare linie şi pe fiecare coloană a pătratului 100x100, împărţit în pătrăţele, vom folosi câte 100 de chibrituri . . . 2p

Pătratul 100x100 conţine 101 linii şi 101 coloane . . . 2p

Numărul total de chibrituri este egal cu $101 \cdot 100 + 101 \cdot 100 = 20200$ . . . 3p