Concursul Interjudeţean
"Matematica, de drag"
Ediţia a VIII - a, Bistriţa
22 - 24 noiembrie 2013

Clasa a XII-a

Barem de corectare şi notare

Subiectul I

Considerăm şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = 1$ şi $x_{n+1} = \frac{x_n}{n} + \frac{n+1}{n^2}$, $\forall n \geq 1$. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = 1$.

Soluţie

Scriem relaţia de recurenţă sub forma: $nx_{n+1} = x_n + \frac{n+1}{n}$, $n = 1, 2, ...$ 0.5p

Dăm valori lui n de la 1 la $n-1$ şi obţinem:

$1x_2 = x_1 + \frac{2}{1}$

$2x_3 = x_2 + \frac{3}{2}$

$3x_4 = x_3 + \frac{4}{3}$

$4x_5 = x_4 + \frac{5}{4}$

$\vdots$

$(n-2)x_{n-1} = x_{n-2} + \frac{n-1}{n-2}$

$(n-1)x_n = x_{n-1} + \frac{n}{n-1}$

Eliminăm pe $x_2,\ x_3, ..., x_{n-1}$ prin înmulţire relaţia (2) cu 1!, relaţia (3) cu 2!, relaţia (4) cu 3!,..., relaţia (n-2) cu $(n-3)!$ şi relaţia (n-1) cu $(n-2)!$ 1p

Obţinem:

$x_n = \frac{1}{(n-1)!}[1 + \frac{2!}{1^2} + \frac{3!}{2^2} + ... + \frac{n!}{(n-1)^2}]$

şi

$nx_n = \frac{n[1+\frac{2!}{1^2}+\frac{3!}{2^2}+...+\frac{n!}{(n-1)^2}]}{(n-1)!}$ 0.5p

Aplicăm Stolz-Cesaro şi obţinem succesiv:

$\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n!-(n-1)!}[(n+1)(1 + \frac{2!}{1^2} + ... + \frac{(n+1)!}{n^2} - n(1 + \frac{2!}{1^2} + ... + \frac{n!}{(n-1)^2})]$ 1p

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)(n+1)!}{n^2}+1+\frac{2!}{1!}+...+\frac{n!}{(n-1)^2}}{(n-1)(n-1)!} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+2)(n+2)!}{(n+1)^2} - \frac{(n+1)(n+1)!}{n^2} + \frac{(n+1)!}{n^2}}{(n-1)(n-1)!} =$ 1p

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+2)(n+2)!}{(n+1)^2} - \frac{(n+1)!}{n}}{(n-1)!(n^2-n+1)} =$ 1p

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)![\frac{(n+2)^2}{(n+1)^2} - \frac{1}{n}]}{(n-1)!(n^2-n+1)!} =$ 1p

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+3n^2+2n-1}{n^3+1} = 1$ 1p

Subiectul II

Calculaţi: $\int \frac{dx}{\sin x \sin(x+1)\sin(x+2)\sin(x+3)}$, x fiind dintr-un interval în care numitorul nu se anulează.

Soluţie:

Avem

$ctg\alpha - ctg\beta = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$

de unde

$\frac{1}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}(ctg\alpha - ctg\beta),\ \alpha \neq \beta$ 1p

Atunci

$I = \int \frac{dx}{\sin x \sin(x+1)\sin(x+2)\sin(x+3)} = \frac{1}{sin^2 1}\int [ctgx - ctg(x+1)][ctg(x+2) - ctg(x+3)]dx$ 0.5p

$= \frac{1}{\sin^2 1}\int [ctgxctg(x+2) - ctg(x+1)ctg(x+2) - ctgxctg(x+3) + ctg(x+1)ctg(x+3)]\mathrm{dx}$ 1p

Din $ctg(\alpha-\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha} = \frac{ctg\alpha ctg\beta + 1}{ctg\beta - ctg\alpha}$ 1p

avem $ctg\alpha ctg\beta = ctg(\alpha-\beta)(ctg\beta - ctg\alpha) - 1$ 0.5p

Atunci

$I = \frac{1}{\sin^2 1}\int \{ctg2[ctg(x+2) - ctgx) - 1 + ctg1[ctg(x+2) - ctg(x+1)] +$

$+1 + ctg3[ctg(x+3) - ctgx] + 1 - ctg2[ctg(x+3) - ctg(x+1)] - 1\}dx =$ 1p

$= \frac{1}{\sin^2 1}\{-ctg2\ln|\sin(x+2)| + ctg2\ln|(\sin x)| +$

$+ctg1\ln|\sin(x+2)| - ctg1\ln|\sin(x+2)| +$

$+ctg3\ln|sin(x+3)| + ctg2\ln|\sin(x+1)|\} + \mathcal{C}$ 1p

$= \frac{1}{sin^2 1}[(ctg2 - ctg3)\ln|\sin x| + (ctg2 - ctg1)\ln|\sin(x+1)| + (ctg1 - ctg2)\ln|sin(x+2)| + (ctg3 - ctg2)\ln|sin(x+3)|] + \mathcal{C}$ 1p

Subiectul III

Fie a număr natural par şi nenul. Arătaţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ numărul $f_a(n) = a^{2^n} + a^{2^{n-1}} + 1$ are cel puţin n divizori primi diferiţi.

Soluţie

Folosim inducţia matematică şi identitatea

$x^4 + x^2 + 1 = (x^2+1)^2 - x^2 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1),\ x \in \mathbb{R}$ 1p

Pentru $n = 1$ avem $f_a(1) = a^2 + a + 1 \geq 7$ care are cel puţin un divizor prim(cel mai mic divizor diferit de 1) 0.5p

Presupunem că $f_a(n)$ are cel puţin n divizori primi 0.5p

Avem

$f_a(n+1) = a^{2^{n+1}} + a^{2^n} + 1 = (a^{2^{n-1}})^{2^2} + (a^{2^{n-1}})^2 + 1 =$

$(a^{2^n} - a^{2^{n-1}} + 1)(a^{2^n} + a^{2^{n-1}} + 1)$ 1p

Arătăm că numerele $a^{2^n} - a^{2^{n-1}} + 1$ şi $f_a(n)$ sunt prime între ele 0.5p

Fie $d = (a^{2^n} - a^{2^{n-1}} + 1, f_a(n))$; atunci 0.5p

$d | a^{2^n} + a^{2^{n-1}} + 1 - a^{2^n} + a^{2^{n-1}} - 1$

adică $d | 2 \cdot a^{2^{n-1}}$ 0.5p

Cum d este impar deducem că $d | a^{2^{n-1}}$ 0.5p

Din $d | a^{2^{n-1}}$ şi $d | a^{2^n} + a^{2^{n-1}} + 1$

rezultă $d | 1$, adică $d = 1$ 0.5p

Deci $a^{2^n} - a^{2^{n-1}} + 1$şi $f_a(n)$ sunt prime între ele.

Rezultă că $a^{2^n} - a^{2^{n-1}} + 1$ are cel puţin un factor prim care nu se află printre factorii lui $f_a(n)$ ... 1p

În final rezultă că $f_a(n+1)$ are cel puţin $n+1$ factori 0.5p