**Concursul Interjudeţean**
**"Matematica, de drag"**
**Ediţia a VIII - a, Bistriţa**
**22 - 24 noiembrie 2013**

**Clasa a XI-a**

---

**Barem de corectare şi notare**

## Subiectul I

Fie $a_1,\ a_2, ..., a_n > 0$, unde $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$. Să se arate că:

$$a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + ... + a_n^{n-1} \geq a_2 a_3 ... a_n + a_1 a_3 ... a_n + ... + a_1 a_2 ... a_{n-1}.$$

Rezolvaţi, în mulţimea numerelor reale ecuaţia:

$$1^{2013x} + 2^{2013x} + ... + 2014^{2013x} = 2014^x(1 + \frac{1}{2^x} + ... + \frac{1}{2014^x}).$$

**Soluţie:**

Avem:

$a_2^{n-1} + a_3^{n-1} + ... + a_n^{n-1} \geq (n-1)a_2 a_3 ... a_n$
$a_1^{n-1} + a_3^{n-1} + ... + a_n^{n-1} \geq (n-1)a_1 a_3 ... a_n$
$\vdots$
$a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + ... + a_{n-1}^{n-1} \geq (n-1)a_1 a_2 ... a_{n-1}$

(inegalitatea mediilor) .................................................... 1p

de unde

$(n-1)(a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + ... + a_n^{n-1}) \geq (n-1)(a_2 a_3 ... a_n + a_1 a_3 ... a_n + ... + a_1 a_2 ... a_{n-1})$

adică inegalitatea din enunţ .................................................... 1p

Pentru $n \geq 3$ avem egalitate dacă şi numai dacă $a_1 = a_2 = ... = a_n$ .................... 1p

Pentru $n = 2$ egalitatea are loc pentru orice două numere reale .................... 1p

Ecuaţia dată se scrie sub forma:

$(1^x)^{2014-1} + (2^x)^{2014-1} + ... + (2014^x)^{2014-1} =$

$= 2^x \cdot ... \cdot 2014^x + 1^x \cdot 3^x \cdot ... \cdot 2014^x + ... + 1^x \cdot 2^x \cdot ... \cdot 2013^x$ .................... 1p

Folosim inegalitatea din enunţ pentru $n = 2014,\ a_1 = 1^x,\ a_2 = 2^x, ..., a_{2014} = 2014^x$ şi deducem că ecuaţia din enunţ este posibilă dacă

$1^x = 2^x = 3^x = ... = 2014^x$ .................................................... 1p

de unde $x = 0$ .................................................... 1p

**Subiectul II**

Demonstraţi că :

$$\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} \cos 20^o} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} \cos 40^o} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} \cos 80^o} > 3$$

**Soluţie**

Verificăm mai întâi că avem $\cos 20^o \cos 40^o \cos 80^o = \frac{1}{8}$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1p

Într-adevăr, putem scrie că:

$8 \cos 20^o \cos 40^o \cos 80^o = 4(\cos 20^o + \cos 60^o) \cos 80^o = 4 \cos 20^o \cos 80^o + 2 \cos 80^o =$

$= 2(\cos 60^o + \cos 100^o) + 2 \cos 80^o = 1$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2p

Observăm că numitorii fracţiilor din enunţ sunt strict pozitivi. Folosind inegalitatea dintre media aritmetică şi media armonică, avem:

$\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} \cos 20^o} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} \cos 40^o} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} \cos 80^o} \geq 3 \cdot \frac{3}{\log_{\frac{1}{2}} \cos 20^o + \log_{\frac{1}{2}} \cos 40^o + \log_{\frac{1}{2}} \cos 80^o} =$

$= \frac{9}{\log_{\frac{1}{2}} (\cos 20^o \cos 40^o \cos 80^o)} = \frac{9}{\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}} = \frac{9}{3} = 3$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3p

Deoarece numerele $\log_{\frac{1}{2}} \cos 20^o$, $\log_{\frac{1}{2}} \cos 40^o$, $\log_{\frac{1}{2}} \cos 80^o$ nu sunt egale între ele, nu este realizată egalitatea în inegalitatea precedentă , deci inegalitatea este strictă . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1p

**Subiectul III** Arătaţi că pentru orice $p$ întreg toţi termenii şirului $a_1 = a_2 = 1,\ a_3 = 2,\ a_{n+3} = \frac{a_{n+1}a_{n+2}+2p+1}{a_n},\ n \geq 1$ sunt numere întregi.

**Soluţie:**

Avem:

$a_4 = \frac{a_2a_3+2p+1}{a_1} = 2p+3\ \in \mathbb{Z}$ .................... 0.5p

$a_5 = \frac{a_3a_4+2p+1}{a_2} = 6p+7 \in\ \mathbb{Z}$ .................... 0.5p

$a_6 = \frac{a_4a_5+2p+1}{a_3} = 6p^2+17p+11\ \in \mathbb{Z}$

$a_7 = \frac{a_5a_6+2p+1}{a_4} = 18p^2+45p+26\ \in \mathbb{Z}$

$a_8 = \frac{a_6a_7+2p+1}{a_5} = 18p^3+75p^2+99p+41\ \in \mathbb{Z}$

Acum, observăm că:

$a_na_{n+3} = a_{n+1}a_{n+2}+2p+1$ .................... 0.5p

$a_{n+1}a_{n+4} = a_{n+2}a_{n+3}+2p+1$ .................... 0.5p

de unde, prin scădere, obţinem: $a_{n+1}a_{n+4} - a_na_{n+3} = a_{n+2}a_{n+3} - a_{n+1}a_{n+2}$ .................... 0.5p

sau

$a_{n+1}(a_{n+4}+a_{n+2}) = a_{n+3}(a_n+a_{n+2})$ .................... 1p

adică

$\frac{a_{n+4}+a_{n+2}}{a_{n+3}} = \frac{a_{n+2}+a_n}{a_{n+1}},\quad n = 1, 2, ...$ .................... 1p

Rezultă că

$\frac{a_{2k}+a_{2k+2}}{a_{2k+1}} = \frac{a_{2k}+a_{2k-2}}{a_{2k-1}} = ... = \frac{a_4+a_2}{a_3} = p+2 \in \mathbb{Z}$ .................... 1p

şi

$\frac{a_{2k+1}+a_{2k-1}}{a_{2k}} = \frac{a_{2k-1}+a_{2k-3}}{a_{2k-2}} = ... = \frac{a_3+a_1}{a_2} = p+2 \in \mathbb{Z}$ .................... 1p

de unde prin, inducţie matematică, rezultă concluzia problemei .................... 0.5p