Concursul Interjudețean
"Matematica, de drag"
Ediția a VII - a, Bistrița
23 - 25 noiembrie 2012

Clasa a X-a

1. Să se determine termenul general al şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ ştiind că $a_1 = 1$ şi

$$0!a_1 + 1!a_2 + ... + (n-1)!a_n = \frac{a_n a_{n+1}(n-1)!n!}{2}, \text{ oricare ar fi } n \geq 1.$$

2. Notăm cu l_a lungimea bisectoarei din A, cu h_a lungimea înălţimii din A şi cu r raza cercului înscris în $\triangle ABC$. Arătaţi că:

$$\frac{1}{l_a} + \frac{1}{h_a}\sin\frac{A}{2} = \frac{1}{r}\sin\frac{A}{2}$$

3. i) Arătaţi că

$$x^3 + y^3 + z^3 - (x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + yz^2 + y^2z) + 3xyz \geq 0, \ \forall x,\ y,\ z \geq 0.$$

ii) Să se arate că numerele reale a, b satisfac relaţia:

$$x^3 + y^3 + z^3 + a(x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + yz^2 + y^2z) + bxyz \geq 0, \ \forall x,\ y,\ z \geq 0.$$

dacă şi numai dacă există $r, s \in [0, \infty)$ astfel încât $a = r - 1,\ b = 3 - 6r + s$.

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii
- Fiecare subiect se punctează cu 7 puncte.
- Timp efectiv de lucru: $2\frac{1}{2}$ ore.