Concursul Interjudețean
"Matematica, de drag"
Ediția a VII - a, Bistrița
23 - 25 noiembrie 2012

Clasa a IX-a - Soluții și bareme

1. Să se determine cea mai mare valoare a numărului real k pentru care

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 \geq k(x+y)^4,$$

oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

Soluţie.

Pentru $x = y = 1$ obţinem $3 \geq k \cdot 16$, de unde $k \leq \frac{3}{16}$. 1p

Arătăm că $k = \frac{3}{16}$ este cea mai mare valoare a numărului real k pentru care inegalitatea are loc oricare ar fi $x,\ y\ \in \mathbb{R}$.

Trebuie să arătăm că

$x^4 + x^2y^2 + y^4 \geq \frac{3}{16}(x+y)^4,\ \forall x,\ y\ \in \mathbb{R}$. 1p

Efectuând calculele, obţinem:

$13x^4 + 13y^4 - 2x^2y^2 - 12x^3y - 12xy^3 \geq 0,\ \forall x,\ y\ \in \mathbb{R}$. 1p

sau

$13x^2(x-y)^2 + 13y^2(x-y)^2 + 14xy(x-y)^2 \geq 0$ 1p

sau

$(x-y)^2[13x^2 + 13y^2 + 14xy) \geq 0$ 1p

sau

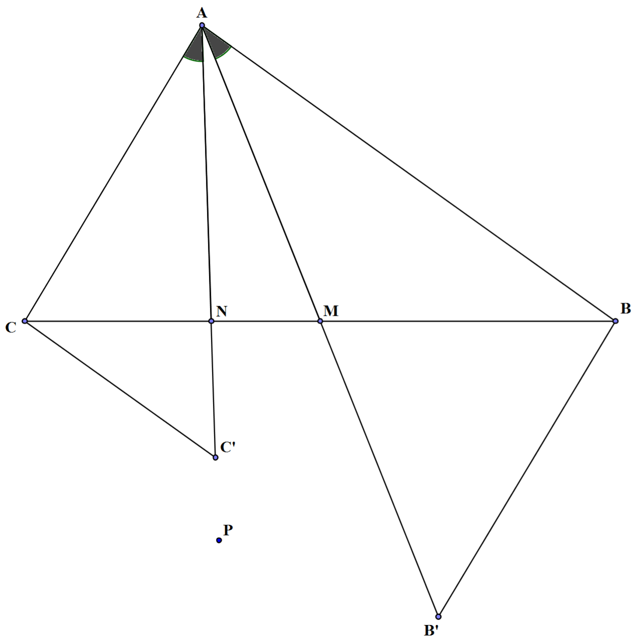
$13(x-y)^2[(x + \frac{7y}{13})^2 + \frac{120}{169}y^2] \geq 0,$ 1p

pentru $\forall x,\ y\ \in \mathbb{R}$.

Aşadar, $k = \frac{3}{16}$. 1p

Clasa a IX-a - Soluții și bareme

2. Se consideră triunghiul ABC în care notăm $AB = c$, $AC = b$, M mijlocul lui (BC). Arătaţi că dacă P este punctul din plan cu $\overrightarrow{AP} = b^2 \cdot \overrightarrow{AB} + c^2 \cdot \overrightarrow{AC}$, atunci $m(\widehat{BAP}) = m(\widehat{CAP})$.



Soluţie.

Figura 1p

Fie $N \in (BC)$, $\widehat{BAM} \equiv \widehat{CAN}$. Ducem paralela prin B la AC care intersectează AM în B' şi paralela prin C la AB care intersectează AN în C'. 1p

Rezultă că $BB' = AC$.

Deoarece $\triangle ACC' \sim \triangle ABB'$, rezultă că $\frac{CC'}{BB'} = \frac{AC}{AB}$, $CC' = \frac{b^2}{c}$ 1p

Deoarece $\triangle NCC' \sim \triangle NAB$, rezultă că $\frac{CC'}{AB} = \frac{CN}{NB}$, $\frac{NC}{NB} = \frac{b^2}{c^2}$ 1p

Folosind formula vectorului cevian, rezultă că:

$\overrightarrow{AN} = \frac{CN}{CB} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{NB}{CB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{b^2}{b^2+c^2} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{c^2}{b^2+c^2} \cdot \overrightarrow{AC}$ 1p

Ţinând seama că $\overrightarrow{AP} = (b^2 + c^2) \cdot \overrightarrow{AN}$, rezultă că vectorii $\overrightarrow{AN}$ şi $\overrightarrow{AP}$ sunt coliniari . 1p

adică $P \in AN$, deci $m(\widehat{BAP}) = m(\widehat{BAM}) = m(\widehat{CAM}) = m(\widehat{CAP})$ 1p

Clasa a IX-a - Soluții și bareme

3. Dacă $0 < a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$ şi $a_1 + a_2 + ... + a_n \geq k$ atunci

$$a_1^2 + 3a_2^2 + 5a_3^2 + ... + (2n-1)a_n^2 \geq k^2,\ n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

Soluţie.

Ţinând seama că $0 < a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$ şi observând că

$2k - 1 = 1 + 2(k-1), k = 1, 2...$ 2p

avem succesiv $a_1^2 + 2a_2^2 + 5a_3^3 + ... + (2n-1)a_n^2 =$

$a_1^2 + (1+2)a_2^2 + (1+2+2)a_3^2 + ... + (1 + \underbrace{2 + 2 + ... + 2}_{n-1\ ori})a_n^2 =$ 1p

$= a_1^2 + a_2^2 + 2a_2^2 + a_3^2 + 2a_3^2 + 2a_3^2 + ... + a_n^2 + \underbrace{2a_n^2 + ... + 2}_{n-1\ ori} a_n^2 \geq$

$\geq a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 + a_3^2 + 2a_1a_3 + 2a_2a_3 + ... + a_n^2 + 2a_1a_n + ... + 2a_{n-1}a_n =$ 2p

$= (a_1 + a_2 + ... + a_n)^2$ 1p

$\geq k^2$ 1p