Concursul Interjudețean
"Matematica, de drag"
Ediția a VII - a, Bistrița
23 - 25 noiembrie 2012

Clasa a VIII-a

Subiectul I. Rezolvaţi ecuaţia: $\frac{x^3+1}{9}+\frac{x^3+2}{10}+\frac{x^3+3}{11}+...+\frac{x^3+1012}{1020}=1012.$

Soluţie. Ecuaţia este echivalentă cu: $x^3(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+...+\frac{1}{1020})=(1-\frac{1}{9})+(1-\frac{2}{10})+...+(1-\frac{1012}{1020})$ 2p

$x^3(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+...+\frac{1}{1020})=8\cdot(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+...+\frac{1}{1020})$ 2p

Deci $x^3=8$, de unde $x^3-8=0$ 1p

$x^3-8=0\Leftrightarrow(x-2)(x^2+2x+4)=0$.

Însă $x^2+2x+4=(x^2+2x+1)^2+3=(x+1)^2+3>0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$ 1p

Deci $x-2=0$, de unde $x=2$. Soluţia ecuaţiei este 2 . . . . 1p

Subiectul II. Se dă suma: $S_n = 1 + \frac{a_1}{1-a_1} + \frac{a_2}{(1-a_1)(1-a_2)} + ... + \frac{a_n}{(1-a_1)(1-a_2)...(1-a_n)}$, unde $a_i \in \mathbb{Z} \setminus \{1\},\ i = \overline{1,n}$. Determinaţi numerele întregi $a_i,\ i = \overline{1,n}$ pentru care S_n este număr natural.

CLASA a VIII-a

Subiectul II

Se dă suma:

$$S_n = 1 + \frac{a_1}{1-a_1} + \frac{a_2}{(1-a_1)(1-a_2)} + \dots + \frac{a_n}{(1-a_1)(1-a_2)\cdot\ldots\cdot(1-a_n)},$$

unde $a_i \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}, i = \overline{1,n}$.

Determinați numerele întregi a_i, $i = \overline{1,n}$ pentru care S_n este număr natural.

BAREM DE CORECTURĂ ȘI DE EVALUARE.

Avem:

$$S_n = \left(1 + \frac{a_1}{1-a_1}\right) + \frac{a_2}{(1-a_1)(1-a_2)} + \dots + \frac{a_n}{(1-a_1)(1-a_2)\cdot\ldots\cdot(1-a_n)} =$$

$$= \left[\frac{1}{1-a_1} + \frac{a_2}{(1-a_1)(1-a_2)}\right] + \dots + \frac{a_n}{(1-a_1)(1-a_2)\cdot\ldots\cdot(1-a_n)} =$$

$$= \frac{1-a_2+a_2}{(1-a_1)(1-a_2)} + \frac{a_3}{(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)} + \dots + \frac{a_n}{(1-a_1)\cdot(1-a_2)\cdot\ldots\cdot(1-a_n)} =$$

$$= \dots = \frac{1}{(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)\cdot\ldots\cdot(1-a_n)}. \quad (4p)$$

$S_n \in \mathbb{N}$ dacă $1-a_{i_1}; 1-a_{i_2}; \dots; 1-a_{i_{2k}} \in \{-1\}$,

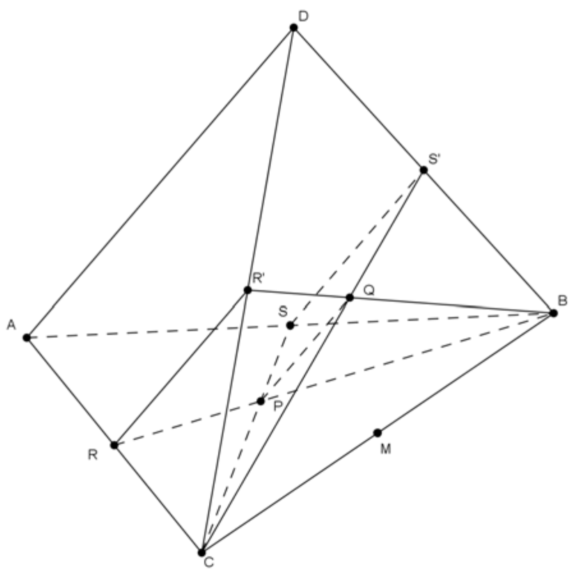
iar $1-a_{i_{2k+1}}; 1-a_{i_{2k+2}}; \dots; 1-a_{i_p} \in \{1\}$, (2p)

unde $2k+p=n$

Se obține: $a_{i_1} = a_{i_2} = \dots = a_{i_{2k}} = 2$ și $a_{i_{2k+1}} = a_{i_{2k+2}} = \dots = a_{i_p} =$ (1p)

Subiectul III. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare, punctul M este mijlocul segmentului (BC), iar punctele P, Q, R, S, R' şi S' astfel încât $P \in (AM)$, $Q \in (DM)$, $BP \cap AC = \{R\}$, $CP \cap AB = \{S\}$, $BQ \cap CD = \{R'\}$şi $QC \cap BD = \{S'\}$.
a) Dacă punctele P şi Q sunt centrele de greutate ale triunghiurilor ABC şi, respectiv, BCD, arătaţi că dreapta PQ este paralelă la planul (ABD).
b) Demonstraţi că dreptele SS' şi RR' sunt coplanare.

a) Avem $\frac{MP}{MA} = \frac{MQ}{MD} = \frac{1}{3}$, deci $PQ \parallel AD$ (teorema reciprocă a lui Thales) în $\triangle AMD$



1p

Cum $AD \subset (ABD)$ şi $PQ \parallel AD$, rezultă că $PQ \parallel (ABD)$ 1p

b) ÎN $\triangle ABC$ şi $\triangle BCD$ aplicând teorema lui Ceva avem:
$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{RC}{RA} \cdot \frac{SA}{SB} = 1$ şi $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{R'C}{R'D} \cdot \frac{S'D}{S'B} = 1$ 2p
Cum $MB = MC$ se obţine: $\frac{RC}{RA} = \frac{SB}{SA}$ şi $\frac{R'C}{R'D} = \frac{S'B}{S'D}$ 1p
Deci $SR \parallel BC$ şi $S'R' \parallel BC$ (teorema reciprocă a lui Thales) 1p

Prin urmare, $SR \parallel S'R'$, de unde rezultă că dreptele SS' şi RR' sunt coplanare 1p.