Concursul Interjudețean
"Matematica, de drag"
Ediția a VII - a, Bistrița
23 - 25 noiembrie 2012

Clasa a VII-a **Barem de corectare şi notare**

Subiectul I . Aflaţi cardinalul mulţimii $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid\ x = \frac{n^2+21n}{n-1},\ n \in \mathbb{N},\ n \neq 1\}$.

Solucţie.

$\frac{n^2+21n}{n-1} \in \mathbb{Z}$ implică $n-1 \mid\ n^2+21n$ 1p

$n-1 \mid\ n^2+21n \Rightarrow n-1 \mid (n^2-n)+(22n-22)+22$ 1p

$n-1 \mid n(n-1)+22(n-1)+22$ şi $n-1 \mid n(n-1)+22(n-1) \Rightarrow n-1 \mid 22$ 1p

$n-1 \mid 22$ şi $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n-1 \in \{-1, 1, 2, 11, 22\}$ 1p

Deci $n \in \{0; 2; 3; 12; 23\}$ 1p

$n = 0 \Rightarrow x = 0$

$n = 2 \Rightarrow x = 46$

$n = 3 \Rightarrow x = 36$

$n = 12 \Rightarrow x = 36$

$n = 23 \Rightarrow x = 46$ 1p

Deci $cardA = 3$ 1p

Barem de corectare şi notare

Clasa a VII-a

Subiectul II. Numim număr "drag" un număr natural care are exact 4 divizori naturali.

a) Daţi un exemplu de trei numere "dragi" consecutive.

b) Să se arate că nu există trei numere "dragi" consecutive astfel încât primul dintre ele să fie par.

Soluţie.

a) 33; 34; 35 .... 2p

b) Fie $2k$, $2k+1$ şi $2k+2$ trei numere "dragi".

Deoarece $2k$ este număr "drag" şi prin urmare va avea 4 divizori, k este număr prim (divizorii săi vor fi $1,\ 2,\ k,\ 2k$) 2p

Analog se arată că, $k+1$ este număr prim 1p

Cum k şi $k+1$ sunt numere prime $\Rightarrow k=2$ şi numerele căutate ar fi $4,\ 5$ şi 6 .... 1p

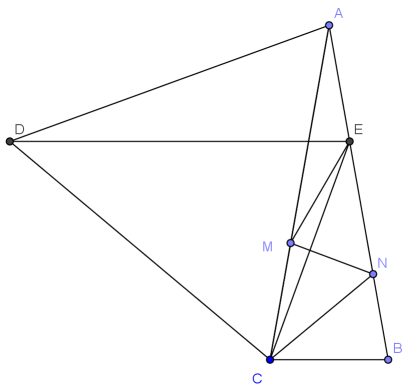
Dar 5 are doar doi divizori, rezultă că nu există trei numere "dragi" consecutive astfel încât primul să fie număr par 1p

Barem de corectare şi notare

Clasa a VII-a

Subiectul III. Se consideră patrulaterul convex ABCD, astfel încât $AB = AC = $
$= AD = CD$ şi $m(\widehat{ABC}) = 80^\circ$. Pe latura AB se ia punctul E, cu $m(\widehat{CEB}) = 30^\circ$. Arătaţi că dreptele DE şi BC sunt paralele.

Soluţie.



Triunghiul ABC este isoscel, iar $\triangle ACD$ este echilateral, deci $m(\widehat{BAC}) = 20^o$, iar $m(\widehat{BAD}) = 20^o + 60^o = 80^o$ 1p

Fie punctul $M \in (AC)$ astfel încât $m(\widehat{AME}) = 20^o$, deci $\triangle AME$ este isoscel, cu $(AE) \equiv (ME)$ (1)

$m(\widehat{BCE} = 180^o - (30^o + 80^o) = 70^o$, deci $m(\widehat{ACE}) = 10^o$ 1p

$m(\widehat{MEB} = 40^o$(teorema unghiului exterior), în $\triangle AME$, deci $m(\widehat{MEC}) = 10^o$

$\triangle MCE$ este isoscel, deci $(ME) \equiv (MC)$ (2) 1p

Fie punctul $N \in (EB)$, cu $(ME) \equiv (MN)$ (3)

$m(\widehat{EMN}) = 180^o - 2 \cdot 40^o = 100^o$ 1p

Deci $m(\widehat{CMN}) = 180^o - (100^o + 20^o) = 60^o$ (4)

Din (1), (2), (4) rezultă c u a $\triangle MCN$ este echilateral, de unde $(MC) \equiv (CN)$ şi $m(\widehat{MNC}) = 60^O$ 1p

$m(\widehat{CNB}) = 180^o - (40^o + 60^o) = 80^o$.

Însă $m(\widehat{NBC}) = 80^o$, deci $\triangle BCN$ este isoscel , de unde $(BC) \equiv (CN)$.

Prin urmare $AE = ME = MN = CN = BC$ şi $\triangle ADE \equiv \triangle BAC(L.U.L)$ . . . . 1p Deci $m(\widehat{AED}) = m(\widehat{ABC}) = 80^o$ şi $DE \parallel BC$ 1p