Concursul Interjudețean
"Matematica, de drag"
Ediția a VII - a, Bistrița
23 - 25 noiembrie 2012

Clasa a VI -a

Subiectul I. Fie punctele coliniare $A_0,\ A_1,\ A_2, ...,\ A_n$ situate pe dreapta d în această ordine astfel încât: $A_0A_1 = 1cm,\ A_1A_2 = 2cm, ...,\ A_{n-1}A_n = ncm$. a) Aflaţi lungimea segmentului $A_{45}A_{99}$ precum şi distanţa dintre punctele A_0 şi M, unde M este mijlocul segmentului $[A_{45}A_{99}]$. b) Aflaţi numărul n, dacă lungimea segmentului $[A_0A_n]$ este egală cu 861 cm.

Soluţie.

a) $A_{45}A_{99} = A_0A_{99} - A_0A_{45} = (1 + 2 + ... + 99) - (1 + 2 + ... + 45) =$

$= \frac{99 \cdot 100}{2} - \frac{45 \cdot 44}{2} = 3915cm$ 3p

b) $A_0A_n = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ 1p

$\frac{n(n+1)}{2} = 861$ implică $n(n + 1) = 2 \cdot 861 = 2 \cdot 21 \cdot 41 = 42 \cdot 41$ 2p

Deci $n = 41$..1p

Subiectul II. Numerele naturale nenule a, b, c îndeplinesc simultan condiţiile:
i) $a + 2b + 3c = 3000$, (1) şi $9b + c = 1000$, (2).
ii) a are 16 divizori, b are 8 divizori şi c are 4 divizori. Să se demonstreze că a are patru cifre, b are trei cifre şi c are două cifre.

Soluţie.

-b şi c nu pot avea simultan câte două cifre, pentru că am avea $9b + c \leq 990$, contradicţie....................1p

-b şi nu pot avea simultan câte trei cifre, pentru că în (1) am avea $b = c = 100$, contradicţie ($b \neq c$)....................1p

- deoarece b are 8 divizori, cea mai mică valoare a lui b este $2^3 \cdot 3 = 24$, deci b nu poate avea o cifră....................1p

-dacă c ar avea o cifră, atunci $c = 2 \cdot 3 = 6$ sau $c = 2^3 = 8$.
Dar $c \in \{6, 8\}$ conduce la contradicţie în (2).
Prin urmare, dintre numerele b şi c unul are două cifre, iar celălalt 3 cifre..........1p
Dacă b ar avea două două cifre, atunci am avea:
$b = 2^3 \cdot 3 = 24$ şi $c = 976$ "fals"
$b = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ şi $c = 970$ "fals"
$b = 2^3 \cdot 5 = 40$ şi $c = 960$ "fals"
$b = 2 \cdot 3^3 = 54$ şi $c = 976 = 2 \cdot 11 \cdot 43$ "fals"....................1p
Deci, c are două cifre, iar b are 3 cifre....................1p
Din $c \geq 10$ şi $b \geq 100$ şi (2) rezultă că $b \leq 110$
Din $c < 100$; $b \leq 110$ şi (1) rezultă că $a \geq 1000$....................1p
În concluzie, c are două cifre; b are 3 cifre, iar a are 4 cifre.

Subiectul III. Se consideră mulţimea: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = \overline{abcde}\}$, unde a, b, c, d, e sunt cifre distincte pare în baza 10. Aflaţi:

a) Cardinalul mulţimii $B = \{x \in A | \ 4 \ divide \ x\}$.

b) Mulţimea $A \cap C$, unde $C = \{x \in A \mid x = t^2, t \in \mathbb{N}\}$.

Barem de corectare şi notare:

a) Dacă $d = 0$ sau $e = 0$, atunci:

$4 \mid x$, dacă $(d, e) \in D$, unde $D = \{(0, 4),\ (0, 8),\ (2, 0),\ (4, 0),\ (6, 0),\ (8, 0)\}$ 1p

Pentru fiecare element al mulţimii D există 6 triplete distincte de cifre de forma (a, b, c)

Deci există 36 de numere cu proprietatea $(d, e) \in D$ 1p

Dacă $d \neq 0$ şi $e \neq 0$, atunci:

$4 \mid x$, dacă $(d, e) \in E$unde $E = \{(2, 4),\ (2, 8),\ (4, 8),\ (8, 4),\ (6, 8); (6, 4)\}$ 1p

Deoarece $a \neq 0$, fiecărui element al mulţimii î i corespund 4 triplete de forma (a, b, c).

Deci există $6 \cdot 4 = 24$ de numere care au cifra sutelor sau cifra miilor egală cu 0. ... 1p

Prin urmare, $cardA = 36 + 24 = 60$ 1p

b) Suma cifrelor oricărui element $x \in A$ este 20 .... 1p

Cum oricare ar fi $x \in A$, suma cifrelor lui x este de forma $9k + 2,\ k \in \mathbb{N}$, urmează că x nu este pătrat perfect. Concluzionăm ca $A \cap C = \emptyset$ 1p