Concursul Interjudețean
"Matematica, de drag"
Ediția a VII - a, Bistrița
23 - 25 noiembrie 2012

Clasa a V -a - Barem de corectare

Subiectul I. Arătați că pentru orice număr natural nenul n, numărul 21^n poate fi scris ca o sumă de trei pătrate perfecte.

Soluţie.

Cazul n=2k, $k \in \mathbb{N}$

Dacă $n = 2$ avem:

$21^2 = 441 = 361 + 64 + 16 = 19^2 + 8^2 + 4^2$ 1p

$21^2 = 19^2 + 8^2 + 4^2 \ \mid \ \cdot 21^{2k-2}, k \in \mathbb{N}^*$ 1p

$21^{2k} = (19 \cdot 21^{k-1})^2 + (8 \cdot 21^{k-1})^2 + (4 \cdot 21^{k-1})^2$ 1p

Cazul $n = 2k + 1, \ k \in \mathbb{N}$

$21^2 = 4^2 + 2^2 + 1$ 1p

$21^2 = 4^2 + 2^2 + 1 \ \mid \ 21^{2k}$ 1p

$21^{2k+1} = (4 \cdot 21^k)^2 + (2 \cdot 21^k)^2 + (21^k)^2$ 1p

Prin urmare, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, numărul 21^n poate fi scris ca o sumă de trei pătrate perfecte 1p

Clasa a V -a - Barem de corectare

Subiectul II. a) Aflaţi suma cifrelor numărului a, unde $a = 2^{4n+1} \cdot 5^{4n+5} - 3$ ($n \in \mathbb{N}$).
b) Determinaţi cifrele numărului: $x = 100^n - 101^3 \cdot 10^n$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 7$.

Soluţie.

a) $a = 2^{4n+1} \cdot 5^{4n+1} \cdot 5^4 - 3 = 10^{4n+1} \cdot 5^4 - 3 =$ 1p

$= 625 \underbrace{00...000}_{(4n+1)\ zerouri} -3 = 624\underbrace{999...99}_{4n\ de\ 9}7$ 1p

Suma cifrelor lui a este egală cu $4n \cdot 9 + (6 + 2 + 4 + 7) = 36 \cdot n + 19$ 1p

b) $x = 10^n(10^n - 101^3)$ şi $101^3 = 1030301$ 1p

$10^n - 101^3 = 1\underbrace{00...0}_{n\ ori} - 1030301 = \underbrace{999...9}_{(n-7) de 9}8969699$ 1p

Atunci $x = \underbrace{999...9}_{(n-7) de\ 9}8969699\underbrace{00...0}_{n\ cifre}$ 1p

Deci, x are $(n-3)$ cifre de 9, o cifră de 8, două cifre de 6 şi n zerouri.......... 1p

Clasa a V -a - Barem de corectare

Subiectul III. Fie numerele naturale de trei cifre scrise în baza zece cu proprietatea că numărul format din primele două cifre ale lor este de trei ori mai mare decât numărul format din ultimele două cifre ale acestora. Aflaţi numerele şi arătaţi că suma cifrelor acestor numere este 13.

Soluţie. Dacă numărul este de forma $\overline{abc}$ şi $\overline{ab} = 3 \cdot \overline{bc} \Rightarrow b \leq 3$ şi $b \neq 0$........1p

Pentru $b = 3$ avem că $\overline{a3} = 3 \cdot \overline{3c}$ şi cum $U(3 \cdot c) = 3 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow \overline{a3} = 3 \cdot 31 \Rightarrow a = 9$, deci $\overline{abc} = 931$ şi $a + b + c = 9 + 3 + 1 = 13$.......................................2p

Pentru $b = 2$ avem că $\overline{a2} = 3 \cdot \overline{2c}$ şi cum $U(3 \cdot c) = 2 \Rightarrow c = 4 \Rightarrow \overline{a2} = 3 \cdot 24 \Rightarrow a = 7$ deci $\overline{abc} = 724$ şi $a + b + c = 7 + 2 + 4 = 13$.......................................2p

Pentru $b = 1$ avem că $\overline{a1} = 3 \cdot \overline{1c}$ şi cum $U(3 \cdot c) = 1 \Rightarrow c = 7 \Rightarrow \overline{a1} = 3 \cdot 17 \Rightarrow a = 5$, deci $\overline{abc} = 517$ şi $a + b + c = 5 + 1 + 7 = 13$.......................................2p

Prin urmare, $\overline{abc} \in \{517,\ 724,\ 931\}$ şi în fiecare caz $a + b + c = 13$.