Concursul Interjudețean
"Matematica, de drag"
Ediția a VII - a, Bistrița
23 - 25 noiembrie 2012

Clasa a XII-a - Barem de corectare

1. Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = xarctgx - \tfrac{1}{2}ln(x^2 + 1).$$

Să se calculeze $f^{(2012)}(0)$.

Soluţie. Avem:

$f(0) = 0$

$f'(x) = arctgx,\ f'(0) = 0$

$f''(x) = \frac{1}{1+x^2},\ f''(0) = 1$ 1p

De aici, putem scrie

$(1 + x^2)f''(x) = 1$ 1p

Derivăm în relaţia precedentă de n ori, $n \geq 1$ şi avem:

$(1 + x^2)f^{(n+2)}(x) + C_n^1 2xf^{(n+1)}(x) + 2C_n^2 f^{(n)}(x) = 0$ 1p

De unde, punând $x = 0$, găsim:

$f^{(n+2)}(0) + (n - 1)nf^{(n)}(0) = 0,$

sau

(1) $f^{(n+2)}(0) = -(n - 1)nf^{(n)}(0)$ 1p

Dăm în (1) lui n valorile $2,\ 4, ..., 2k,\ k \geq 1$ şi obţinem:

$f^{(4)}(0) = -1 \cdot 2f^{(2)}(0)$

$f^{(6)}(0) = -3 \cdot 4f^{(4)}(0)$

$\vdots$

$f^{(2k+2)}(0) = -(2k - 1)2kf^{(2k)}(0)$ 1p

Înmulţim aceste inegalităţi membru cu membru şi după simplificări, obţinem:

$f^{(2k+2)}(0) = (-1)^k(2k)!f^{(2)}(0) = (-1)^k(2k)!,\ k = 1, 2, ...$ 1p

Pentru k=1005, găsim:

$f^{(2012)}(0) = -2010!$ 1p

Clasa a XII-a - Barem de corectare

2. Fie $k \in \mathbb{R}^*$, X, $Y \in M_2(\mathbb{C})$ cu proprietatea $2kY^2 = YX - XY$. Să se arate că $Y^2 = O_2$.

Soluţie. Deoarece

$tr(XY) = tr(YX)$ 0.25p

avem

$tr(XY - YX) = 0$ 0.25p

de unde

$tr(2kY^2) = 0$, adică $trY^2 = 0$, deoarece $tr(kA) = ktrA$ 0.25p

Cazul 1

Dacă $detY = 0$ 0.25p

atunci din

egalitatea $Y^2 - tr(Y)Y + detY \cdot I_2 = 0$ 0.25p

rezultă

$Y^2 = (trY) \cdot Y$ 0.25p

adică

$trY^2 = (trY)trY = (trY)^2 = 0$ 0.25p

de unde $trY = 0$ şi deci $Y^2 = O_2$ 0.25p

Cazul 2

Dacă $detY \neq 0$. Din $2kY^2 = YX - XY$ avem

$(kY + X)Y = Y(X - kY)$ .... 0.5 p

iar de aici deducem

(1) $det(kY + X) = det(X - kY)$ 0.5p

Din egalitatea

(2) $det(X + kY) + det(X - kY) = 2detX + 2k^2detY$ 0.5p

şi (1) rezultă

(3) $det(X + kY) = detX + k^2detY$ 0.5p

Pe de altă parte, din egalitatea din enunţ, avem:

$(2kY + X)Y = YX$ 0.25p

de unde

(4) $det(2kY + X)Y = detX$ 0.25p

Pentru $k = 1$, din (2) avem:
(5) $det(X + Y) + det(X - Y) = 2detX + 2detY$ 0.5p
Folosind (5) putem scrie

$$det((2kY + X) + X) + det((2kY + X) - X) = 2det(2kY + X) + 2detX$$

sau

$$det(2kY + 2X) + det(2kY) = 2det(2kY + X) + 2detX$$

sau, utilizând (4) avem:
$det2(kY + X) + det(2kY) = 4detX$ 1p
Cum $det(\lambda A) = \lambda^2 detA,\ A \in M_2(\mathbb{R})$, avem:
$det(kY + X) + k^2 detY = detX$ 0.5p
Utilizăm, din nou, (4) şi avem

$$detX + k^2 detY = detX$$

de unde $detY = 0$ ceea ce constituie o contradicţie..............................0.5p.

Clasa a XII-a - Barem de corectare

3. Fie $k \in \mathbb{R}^*$ şi $a > 1$. Calculaţi:

$$I(a) = \int \frac{\cos^{2k-1} x(\ln a \cdot \cos x + \sin x)}{a^{2kx} + \cos^{2k} x} dx$$

Soluţie.

$I(a) = \int \frac{\ln a \cdot \cos^{2k} x + \cos^{2k-1} x \cdot \sin x)}{a^{2kx} + \cos^{2k} x} dx$ 1p

$= \ln a \int \frac{\cos^{2k} x}{a^{2kx} + \cos^{2k} x} dx + \int \frac{\cos^{2k-1} x \sin x}{a^{2kx} + \cos^{2k} x} dx =$ 1p

$= \ln a \int \frac{a^{2kx} + \cos^{2k} x}{a^{2kx} + \cos^{2k} x} dx -$ 1p

$- \int \frac{a^{2kx} \ln a - \cos^{2k-1} x \sin x}{a^{2kx} + \cos^{2k} x} dx =$ 1p

$= x \ln a - \frac{1}{2k} \int \frac{(a^{2kx} + \cos^{2k} x)'}{a^{2kx} + \cos^{2k} x} dx =$ 2p

$= x \ln a - \frac{1}{2k} \ln(a^{2kx} + \cos^{2k} x) + C$ 1p