Concursul Interjudețean
"Matematica, de drag"
Ediția a VII - a, Bistrița
23 - 25 noiembrie 2012

Clasa a XI-a - Barem de corectare

1. Să se arate că

$$A \cdot (A - B) \cdot B = B \cdot (A - B) \cdot A,$$

pentru orice matrice pătratică de ordin 2 cu urme egale.

Soluţie.

Fie t urma matricelor A şi B. Avem:

$A^2 - tA + detA \cdot I_2 = O_2$ 1p

$B^2 - tB + detB \cdot I_2 = O_2$ 1p

Atunci

$A^2B - BA^2 = (tA - detA \cdot I_2)B - B(tA - detA \cdot I_2) =$

$= tAB - detA \cdot B - tBA + detA \cdot B =$ 1p

$= t(AB - BA)$ 1p

şi

$AB^2 - B^2A = t(AB - BA)$ 1p

Rezultă: $A^2B - BA^2 = AB^2 - B^2A$ de unde

$A^2B - AB^2 = BA^2 - B^2A$ 1p

adică

$A(A - B)B = B(A - B)A$. 1p

Clasa a XI-a - Barem de corectare

2. Să se determine funcţiile $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ care, pentru m,n numere naturale date, îndeplinesc condiţiile:

a) $f(1,1) = m + n$;

b)$f(x, y + z) = f(x, y) + nz$, oricare ar fi $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$;

c) $f(y + z, x) = f(y, x) + mz$, oricare ar fi $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$;

Soluţie.

Pentru $x = 1, y = 1$ şi $z = x - 1$, din b) avem 1.5p

$f(1, x) = f(1,1) + n(x - 1) = m + nx,\ \forall x \in \mathbb{R}$ 1p

Pentru $x = y,\ y = 1$ şi $z = x - 1$, din c) avem:................................ 1.5p

$f(x, y) = f(1, y) + m(x - 1) = m + ny + mx - m = mx + ny,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$ 1,5p

Să arătăm că $f(x, y) = mx + ny$ verifică condiţiile a), b), c).

a) $f(1,1) = m + n$; 0.5p

b) $f(x, y + z) = mx + n(y + z) = mx + ny + nz = f(x, y) + nz,\ \forall x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$.... 0.5p

c) $f(y + z, x) = m(y + z) + nx = my + mx + mz = f(y, x) + mz, \forall x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$... 0.5p

Clasa a XI-a - Barem de corectare

3. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere reale nenule definit prin $a_1 = \frac{1}{6}$ şi $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 3(n+1)(n+2)$, oricare ar fi $n \geq 1$. Să se arate că:

$$a_1a_4 + a_2a_5 + ... + a_na_{n+3} \leq \frac{1}{600}$$

Soluţie.

Avem:

$\frac{1}{a_{n+1}} = (\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}) + (\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}}) + ... + (\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1}) + \frac{1}{a_1} =$ 1p

$= 3[(n+1)(n+2) + n(n+1) + ... + 2\cdot 3 + 1\cdot 2]$

$= 3\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2) = 3\cdot\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}[(k+1)(k+2)(k+3) - k(k+1)(k+2)]$ 1p

$= (n+1)(n+2)(n+3)$ 1p

de unde $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)},\ n = 0, 1, 2, ...$ 1p

Atunci:

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_ka_{k+3} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)} =$ 1p

$\frac{1}{5}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}[\frac{1}{k(k+1)...(k+4)} - \frac{1}{(k+1)...(k+5)}] =$ 1p

$= \frac{1}{5}(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}) - \frac{1}{(n+1)(n+2)...(n+5)} < \frac{1}{5\cdot 120} = \frac{1}{600}$ 1p