**Concursul Interjudețean**
**"Matematica, de drag"**
**Ediția a VII - a, Bistrița**
**23 - 25 noiembrie 2012**

---

Clasa a X-a - Barem de corectare

**Subiectul I**. Să se determine termenul general al şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ ştiind că $a_1 = 1$ şi

$$0!a_1 + 1!a_2 + ... + (n-1)!a_n = \frac{a_n a_{n+1}(n-1)!n!}{2}, \text{ oricare ar fi } n \geq 1.$$

**Soluţie.**

Folosim inducţia matematică.

Pentru $n = 1$ obţinem $a_2 = 2$. Dacă $n = 2$ avem:

$1 + 2 = \frac{2\cdot a_3 \cdot 2}{2}$ de unde $a_3 = \frac{3}{2} = \frac{3}{(3-1)!}$ ........ 1p

Pentru $n = 3$ avem:

$1 + 2 + 3 = \frac{\frac{3}{2}\cdot a_4 \cdot 2\cdot 6}{2}$, de unde $a_4 = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{4}{3!}$ ........ 1p

Presupunem că $a_n = \frac{n}{(n-1)!}$ ........ 1p

şi să arătăm că $a_{n+1} = \frac{n+1}{n!}$ ........ 1p

Din relaţia de recurenţă avem:

$1 + 2 + ... + n = \frac{n}{(n-1)!} \cdot \frac{a_{n+1}\cdot(n-1)!\cdot n!}{2}$ ........ 1p

sau

$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n\cdot a_{n+1}\cdot n!}{2}$ ........ 1p

de unde

$a_{n+1} = \frac{n+1}{n!}$ ........ 1p

ceea ce trebuia demonstrat.

Clasa a X-a - Barem de corectare

2. Notăm cu $l_a$ lungimea bisectoarei din A, cu $h_a$ lungimea înălţimii din A şi cu r raza cercului înscris în $\triangle ABC$. Arătaţi că:

$$\frac{1}{l_a} + \frac{1}{h_a}\sin\frac{A}{2} = \frac{1}{r}\sin\frac{A}{2}$$

**Soluţie.**

Avem $l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$, ........ 1p

de unde

(1) $\frac{1}{l_a} = \frac{1}{2\cos\frac{A}{2}} \cdot \frac{b+c}{bc}$ ........ 1p

Pe de altă parte, putem scrie

$\sin\frac{A}{2}(\frac{1}{r} - \frac{1}{h_a}) = \sin\frac{A}{2} \cdot (\frac{p}{s} - \frac{\frac{a}{2}}{s}) =$ ........ 1p

$= \frac{\sin\frac{A}{2}}{s} \cdot (\frac{b+c}{2}) = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\frac{bc\sin A}{2}} \cdot \frac{b+c}{2}$ ........ 2p

$= \frac{\sin\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} \cdot \frac{b+c}{bc} = \frac{1}{2\cos\frac{A}{2}} \cdot \frac{b+c}{bc}$ ........ 1p

De unde folosind (1), obţinem:

$\frac{1}{l_a} = \sin\frac{A}{2}(\frac{1}{r} - \frac{1}{h_a})$ ........ 1p

ceea ce trebuia demonstrat.

Clasa a X-a - Barem de corectare

3. i) Arătaţi că

$$x^3+y^3+z^3-(x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+yz^2+y^2z)+3xyz\geq 0,\ \forall x,\ y,\ z\geq 0.$$

ii) Să se arate că numerele reale a, b satisfac relaţia:

$$x^3+y^3+z^3+a(x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+yz^2+y^2z)+bxyz\geq 0,\ \forall x,\ y,\ z\geq 0.$$

dacă şi numai dacă există $r,s\in[0,\infty)$ astfel încât $a=r-1,\ b=3-6r+s$.

**Soluţie.**

i) Arătăm că:

$$(1)\ x^3+y^3+z^3-(x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+yz^2+y^2z)+3xyz\geq 0,\ \forall x,\ y,\ z\geq 0.$$

Un calcul simplu ne aratčă (1) este echivalentă cu:

$x(x-y)(x-z)+y(y-x)(y-z)+z(z-x)(z-y)\geq 0,\ \forall x,\ y,\ z\geq 0$ ............ 1p

Putem presupune că $x\geq y\geq z$. Scriind $x-z=(x-y)+(y-z)$ şi, punând în evidenţă diferenţele pozitive $x-y$ şi $y-z$, (1) devine

$x(x-y)^2+z(y-z)^2+(x-y)(y-z)(x-y+z)\geq 0,$ ........................... 1p

adevărată.

ii)O simplă aplicare a inegalităţii mediilor ne justifică faptul că:

(2) $x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2\geq 6xyz,\ \forall x,\ y,z\geq 0$ ...................... 1p

**Suficienţa.** Folosind (1) şi (2), avem:

$x^3+y^3+z^3+a(x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+yz^2+y^2z)+bxyz=$
$=x^3+y^3+z^3+(-1+r)(x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+yz^2+y^2z)+(3-6r+s)xyz=$
$=[x^3+y^3+z^3-(x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+yz^2+y^2z)+3xyz]+$
$+r(x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+yz^2+y^2z-6xyz)+sxyz\geq 0.$ ...................... 2p

**Necesitatea.**Particularizând $x=y=1,\ z=0$, obţinem că $2+2a\geq 0$, adică notând $1+a=r$, deci $a=-1+r$. Particularizând $x=y=z=1$, obţinem că $3+6a+b=s\geq 0$, deci $b=s-6(-1+r)-3=3-6r+s$. ...................................... 2p.