Concursul Interjudețean
"Matematica, de drag"
Ediția a VI - a, Bistrița
18 - 20 noiembrie 2011

Clasa a X-a

1. *Considerăm numerele complexe* $z_1,\ z_2,\ \ldots\ ,z_n$ $Re\ z_k > 0,\ Im\ z_k > 0$ *pentru orice* $k \in \{1,2,...,n\}$.*Să se arate că* $|z_1 + z_2 + ... + z_n| \geq \frac{1}{2}(|z_1| + |z_2| + ... + |z_n|)$.

G.M. 6/2011

Soluție și barem:
Avem:

$$|z_k| \leq Re\ z_k + Im\ z_k,\ k \in \{1,2,...,n\}2p$$

și deci

$\sum |z_k| \leq \sum Re\ z_k + \sum_{k=1}^{n} Im\ z_k$ .... $1p$

de unde rezultă că cel puțin una din sumele $\sum Re\ z_k$ și $\sum Im\ z_k$ este mai mare sau cel puțin egală cu $\frac{1}{2}\sum \mid z_k \mid$ .... $2p$
Să presupunem că $\sum Re\ z_k \geq \frac{1}{2}\sum \mid z_k \mid$ .... $1p$
Atunci:

$\mid \sum z_k \mid \geq \sum Re\ z_k \geq \frac{1}{2}\sum \mid z_k \mid$ .... $1p$

ceea ce trebuia demonstrat.

Concursul Interjudețean
"Matematica, de drag"
Ediția a VI - a, Bistrița
18 - 20 noiembrie 2011

Clasa a X-a

2. Să se arate că pentru orice n natural, $n \geq 2$, avem că:

$$A\sin a_1x \cdot \sin a_2x \cdot ... \cdot \sin a_nx + B\cos a_1x \cdot \cos a_2x \cdot ... \cdot \cos a_nx \leq max\{|A|, |B|\}$$

Ancuța Mititean, Bistrița

unde $a_1,\ a_2,\ ...\ , a_n,\ A,\ B,\ x$ numere reale arbitrare.

Soluție și barem:

Avem:

$|A\sin a_1x \cdot \sin a_2x \cdot ... \cdot \sin a_nx + B\cos a_1x \cdot \cos a_2x \cdot ... \cdot \cos a_nx| \leq$

$\leq |A||\sin a_1x \cdot \sin a_2x \cdot ... \cdot \sin a_nx| + |B||\cos a_1x \cdot \cos a_2x \cdot ... \cdot \cos a_nx| \leq \ldots\ldots\ldots\ldots 2p$

$\leq max\{|A|, |B|\}(|\sin a_1x \cdot \sin a_2x| + |cosa_1x \cdot \cos a_2x|) = max\{|A|, |B|\}E$ 2p

unde

$E = |\sin a_1x \cdot \sin a_2x| + |cosa_1x \cdot \cos a_2x| = \pm\cos(a_1 \pm a_2)x,$ 1p

deci $E \leq 1$ 1p

Atunci:

$A\sin a_1x \cdot \sin a_2x \cdot ... \cdot \sin a_nx + B\cos a_1x \cdot \cos a_2x \cdot ... \cdot \cos a_nx \leq max\{|A|, |B|\}$ .... 1p.

Concursul Interjudețean
"Matematica, de drag"
Ediția a VI - a, Bistrița
18 - 20 noiembrie 2011

Clasa a X-a

3. *Fie* $a_1,\ a_2,\ \ldots,a_n\ \epsilon(0,\infty)$, *arătați că ecuația*

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i+a_{i+1}x}=\sum_{i=1}^n \sqrt{a_{i+1}-a_ix}$$

cu $a_{n+1}=a_1$ *are o singură soluție.*

Dumitru Acu, Sibiu.

Soluție și barem:

Funcția $u:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ u(x)=mx+n,\ m>0,\ n>0$, este descrescătoare pentru $x\ \epsilon\ \mathbb{R}$, iar $v:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ v(x)=-mx+n,\ m>0,\ n>0$ este strict descrescătoare 1p

De asemenea, funcția: $p(x)=\sqrt{mx+n},\ m>0,\ n>0$ este strict crescătoare pentru $x\geq-\frac{n}{m}$, iar funcția $q(x)=\sqrt{-mx+n},\ m>0,\ n>0$ este strict descrescătoare pentru $x\leq\frac{n}{m}$ 1p

Notăm: $f(x)=\sum_{i=1}^n\sqrt{a_i+a_{i+1}x}$ și cu $g(x)=\sum_{i=1}^n\sqrt{a_{i+1}-a_ix},\ a_{n+1}=a_1$.

f este strict crescătoare, fiind sumă de funcții strict crescătoare, ... 0.5p

iar g este strict descrescătoare, fiind sumă de funcții strict ddescrescătoare 0.5p

Se observă că $f(x)=\sum_{i=1}^n\sqrt{a_i}=g(0)$, ceea ce ne arată $x=0$ este o soluție a ecuației 1p

Dacă $x_1<0$ este o soluție a ecuației date, atunci:

$$f(x_1)<f(0)=g(0)<g(x_1)$$

ceeea ce ne arată că $x_1<0$, nu este soluție a ecuației 1p

Dacă $x_1>0$ este o soluție a ecuației date, atunci:

$f(x_2)>f(0)=g(0)>g(x_2)$, contradicție 1p

Așadar, ecuația dată are numai soluția $x=0$ .... 1p.