Concursul Interjudețean
"Matematica, de drag"
Ediția a VI - a, Bistrița
18 - 20 noiembrie 2011

Clasa a VIII-a

1.Fie x, y numere raționale nenule. Arătați că dacă $\frac{x\sqrt{5}+y\sqrt{3}}{y\sqrt{5}+x\sqrt{3}}$ este număr rațional, atunci$|x|= |y|$.

(Gazeta matematică, 5/2011)

Soluție și barem:

Fie $\frac{x\sqrt{5}+y\sqrt{3}}{y\sqrt{5}+x\sqrt{3}} = a$, $a \in \mathbb{Q}$. Avem $\sqrt{5}(x - ay) = \sqrt{3}(ax - y)$. .... **(1p)**

Dacă $x - ay = 0$, atunci $ax - y = 0$, de unde $a = \frac{x}{y} = \frac{y}{x}$,

adică $x^2 = y^2$ și $|x|= |y|$. .... **(2p)**

Dacă $x - ay \neq 0$, atunci $ax - y \neq 0$ și $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{ax-y}{x-ay} = b$, $b \quad \mathbb{Q}_+^*$. .... **(1p)**

Deci $\frac{\sqrt{15}}{3} = b$. Fie $b = \frac{m}{n}$, m, $n \ ^*$ și $(m, n) = 1$. .... **(1p)**

Atunci $\frac{\sqrt{15}}{3} = \frac{m}{n}$, de unde $15 = 9\frac{m^2}{n^2}$ sau $15n^2 = 9m^2$ sau $5n^2 = 3m^2$, de unde $5/m$. **(1p)**

Deci $m = 5k(k \quad ^*)$ și $5n^2 = 75k^2$,

de unde $n^2 = 15k^2$ și $5/n^2$, adică $5/n$, contradicție. .... **(1p)**

2. a) Să se determine numerele naturale n, pătrate perfecte, pentru care

$$1 + 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot ... \cdot \left(2^{2^n} + 1\right) < 2^{2011}.$$

b) Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația $x^{4^n} + y^{4^n} = 2011$, unde $n \ \epsilon \ \mathbb{N}$.

(Maria Sas, Bistrița)

Barem de corectură:

a) Avem:

$1 + 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot ... \cdot \left(2^{2^n} + 1\right) < 2^{2011} \Leftrightarrow 1 + \left(2^{2^0} - 1\right) \cdot \left(2^{2^0} + 1\right) \cdot \left(2^{2^1} + 1\right) \cdot \left(2^{2^2} + 1\right) \cdot ... \cdot$ $\cdot ... \cdot \left(2^{2^{n-1}} + 1\right) \cdot \left(2^{2^n} + 1\right) < 2^{2011} \Leftrightarrow 1 + \left(2^{2^1} - 1\right) \cdot \left(2^{2^1} + 1\right) \cdot \left(2^{2^2} + 1\right) \cdot ... \cdot \left(2^{2^n} + 1\right)$ $< 2^{2011} \Leftrightarrow 1 + \left(2^{2^2} - 1\right) \cdot \left(2^{2^2} + 1\right) \cdot ... \cdot \left(2^{2^n} + 1\right) < 2^{2011} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow 1 + \left(2^{2^{n+1}} - 1\right) <$ $2^{2011} \Leftrightarrow 2^{2^{n+1}} < 2^{2011} \Leftrightarrow 2^{n+1} < 2011 \Leftrightarrow n \leq 9$. .... **(2p)**

Însă n este pătrat perfect, deci n $\{0, 1, 4, 9\}$. .... **(1p)**

b) $n = 0$ implică $x + y = 2011$, de unde (x, y) $\{(k; 2011 - k)\}$, $k \in \mathbb{Z}$ . ... **(2p)**

Dacă $n \geq 1$, atunci $x^{4^n} + y^{4^n} = x^{2^{2n}} + y^{2^{2n}} = \left(x^{2^{2n-1}}\right)^2 + \left(z^{2^{2-1}}\right)^2$. Însă resturile împărțirii unui pătrat perfect la 4 sunt 0 sau 1, iar resturile împărțirii sumei a două pătrate perfecte la 4 sunt 0, 1. sau 2. .... **(1p)**

Cum $2011 = M4 + 3$, urmează că ecuația nu are soluție în$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, dacă $n \geq 1$. .. **(1p)**

3. Fie cubul *ABCDA'B'C'D'* și punctele *M* și *N* proiecțiile punctului *A* pe bisectoarea unghiului *ABD'* și, respectiv, pe bisectoarea unghiului *AB'D'*.

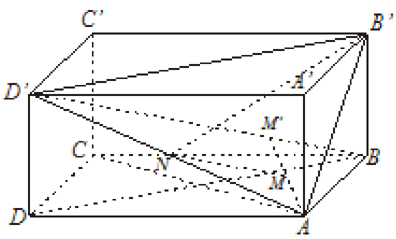
i) Arătați că:

a) $MN \perp AC$;

b) Dreptele *AA'* și *MN* sunt necoplanare.

ii) Câte plane egal depărtate de punctele *M*, *N*, *A* și *A'* există? Justificați.

(Artur Bălăucă, Nicolae Sanda)



Barem de corectură:

a) Fie $AM \cap BD' = \{M'\}$. Triunghiul *ABM'* este isoscel (bisectoarea $\sphericalangle ABD'$ coincide cu înălțimea), deci (BM) este mediană, adică $(AM) \equiv (MM')$. $\Delta AB'D'$ este echilateral, deci *N* este mijlocul segmentului (AD'). .... **(1p)**

Urmează că $[MN]$ este linie mijlocie în $\Delta AD'M'$ și $MN \parallel BD'$ **(1)** .... **(1p)**

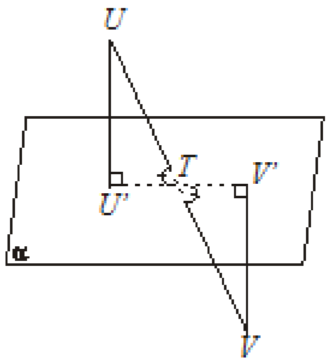
Cum $AC \perp (BDD')$ și $BD' \subset (BDD')$, conchidem că $AC \perp BD'$, **(2)**. Din **(1)** și **(2)** rezultă că $MN \perp AC$. .... **(1p)**

b) Dacă $AA' \parallel MN$, atunci am avea $AA' \parallel BD'$, contradicție! Dacă $AA' \cap MN \neq \Phi$, atunci$MN \subset (AA'D)$ și cum $MN \subset (ABD')$, ar rezulta $(AA'D) \cap (ABD') = MN$, adică $AD' = MN$, contradicție! Prin urmare, dreptele *AA'* și *MN* sunt necoplanare. **(1p)**

2. Lemă. *Dacă planul α conține mijlocul T al segmentului [VU] atunci, punctele U și V sunt egal depărtate de planul α.*

Într-adevăr, fie $UU' \perp \alpha$ și $VV' \perp \alpha$ (U', $V' \in \alpha$). $\Delta UU'T \equiv \Delta VV'T$ (I.U.), deci $UU' = VV'$. Acum, fie punctele *E*, *F*, *G*, *H*, *I*, *K* mijloacele muchiilor *AM*, *NM*, *NA*, *AA'*, *A'N* și, respectiv, *A'M* ale tetraedrului *AMNA'*. Planul (HIK) conține mijloacele muchiilor *AA'*, *A'N* și *A'M* deci, conform **lemei** conchidem că punctele *A'*, *A*, *N*, *M* sunt egal depărtate de acest plan. .... **(1p)**

Analog, punctele *A'*, *A*, *N*, *M* sunt egal depărtate de planele (EFK), (HGE) și (GIF) – 4 plane. .... **(1p)**



Segmentele (HK) și (GF) sunt linii mijlocii în Δ *A'AM* și ΔNAM deci, $HK \,||AM$ și $GF \,||AM$, urmează că dreptele *HK* și *GF* sunt coplanare. Planul (HGF) conține mijloacele muchiilor *AA'*, *AN*, *MN* și *MA'* și conform **lemei** punctele *A*, *M*, *N*, *A'* sunt egal depărtate de acesta. Analog, planele (HEF) și (GEK) au aceeași proprietate. Prin urmare, sunt 7 plane. .... **(1p)**