CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
"MATEMATICA DE DRAG"
EDIȚIA a V-a (19 - 21 noiembrie 2010)
CLASA a IX a

1. Schimbăm x în $-x$ în relația dată ……………………………………………………1p

(2) $f(1+x)+af(1-x)=(a+1)x^2-2(a-1)x+2(a+1)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$ ……..…1p

Înmulțim relația dată cu –a și o adunăm cu (2)…………………………………….....1p

Obținem

(3) $\left(1-a^2\right)f(1+x)=(a+1)(1-a)x^2+2(1-a)(1+a)x+2(1-a)(1+a)$ …………1p

Cum $a\neq 1$, împărțim (3) cu $1-a^2$ și rezultă că $f(1+x)=x^2+2x+2,\forall x\in\mathbb{R}$ … ….1p

Înlocuind pe x cu $x-1$ în (4), ……………………………………………………..1p

găsim $f(x)=(x-1)^2+2(x-1)+2=x^2+1$ ……...1p

2. Notăm $a=x+2y,b=y+2z,c=z+2x$ și avem $a+b+c=3(x+y+z)$ ………...1p

Inegalitatea devine (1) $a^4+b^4+c^4\geq 3\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^4$ …………………………………1p

Se cunoaște inegalitatea $3\left(m^2+n^2+p^2\right)\geq(m+m+p)^2$ ……………………………2p

Punând $m=a^2,n=b^2,p=c^2$ avem $3\left(a^4+b^4+c^4\right)\geq\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\geq\left[\dfrac{(a+b+c)^2}{3}\right]^2$

2p

De unde $a^4+b^4+c^4\geq\dfrac{(a+b+c)^4}{27}$ ….. ………………………………………...1p

3. Avem $\overrightarrow{MP}=\dfrac{\overrightarrow{MC}+\alpha\overrightarrow{MD}}{\alpha+1}$ …. ……………………………………………………..1p

$=\dfrac{1}{\alpha+1}\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\alpha\overrightarrow{MA}+\alpha\overrightarrow{AD}\right)=$

$=\dfrac{1}{\alpha+1}\left(\overrightarrow{BC}+\alpha\overrightarrow{AD}\right)$. … ……………………………………………………….1p

Analog $\overrightarrow{QN}=\dfrac{\overrightarrow{QB}+\alpha\overrightarrow{QC}}{\alpha+1}$ … ……………………………………………………..1p

$=\dfrac{1}{\alpha+1}\left(\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{AB}+\alpha\overrightarrow{QD}+\alpha\overrightarrow{DC}\right)=$

$=\dfrac{1}{\alpha+1}\left(\overrightarrow{AB}+\alpha\overrightarrow{DC}\right)$. … ……………………………………………………….1p

Acum putem scrie $\left|\overrightarrow{MP}\right|+\left|\overrightarrow{QN}\right|=\dfrac{1}{\alpha+1}\left|\overrightarrow{BC}+\alpha\overrightarrow{AD}\right|+\dfrac{1}{\alpha+1}\left|\overrightarrow{AB}+\alpha\overrightarrow{DC}\right|$ … …………1p

$\leq\dfrac{1}{\alpha+1}\left(\left|\overrightarrow{BC}\right|+\alpha\left|\overrightarrow{AD}\right|+\left|\overrightarrow{AB}\right|+\alpha\left|\overrightarrow{DC}\right|\right)$. …. ………………………………………….2p