# CLASA a VI-a

## SOLUȚII ȘI BAREME

**1. Determinați toate numerele naturale nenule care împărțite la 17 dau câtul egal cu restul și împărțite la 23 dau , de asemenea , câtul egal cu restul.**

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ așa încât $n = 17 \cdot q + q$ , $q < 17$, $q \in \mathbb{N}$ . . . . . . 1 p

$n = 23 \cdot r + r$ , $r < 23$, $r \in \mathbb{N}$ . . . . . . 1 p

de unde $n = 18q$ *cu* $0 \le q \angle 17$ . . . . . . . 0,5 p

$n = 24r$ *cu* $0 \le r \angle 23$ . . . . . . . 0,5 p

Din $18q = 24r$ rezultă $3q = 4r$ . . . . . . . 1,5 p

Deci $q = 4a$, $r = 3a$ cu $a \in \mathbb{N}$ și $a \le 4$ . . . . . 1 p

Rezultă $n = 18 \cdot 4a = 72a$, $a = 0, 1, 2, 3, 4$ . . . . . . . 1 p

Deci $n \in \{0, 72, 144, 216, 288\}$ . . . . . . . . . 0,5 p.

**2. Determinați $m$ , $n$ numere naturale astfel încât $2^m - 2^n = 120$.**

Deoarece $2^m > 2^n$ rezultă $m > n$ . Fie $p = m - n \in \mathbb{N}$ . . . . . . 2 p

Atunci $2^{n+p} - 2^n = 120 \Leftrightarrow 2^n(2^p - 1) = 2^3 \cdot 15$ . . . . . . . 2 p

Pt. că $2^p - 1$ este impar, este necesar ca

$\begin{cases} 2^n = 2^3 \\ 2^p - 1 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 3 \\ 2^p = 16 = 2^4 \end{cases} \Leftrightarrow n = 3$ și $p = 4$ . . . . . . . . 2 p

Deci $m = n + p = 3+4 = 7$ . . . . . . . . . . . 1 p

**3. Arătați că numărul** $x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2009 \cdot 2010 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2009} + \frac{1}{2010}\right)$

**este natural și se divide cu 2011.**

$x = 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2010 + 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2010 + 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2010 + \ldots + 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2008 \cdot 2009 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2009 \in \mathbb{N}$ 2p

Apoi:

$x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2010\left[\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2010}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2009}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{1005} + \frac{1}{1006}\right)\right]$ . . . . 2p

$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2010\left[\frac{2011}{1 \cdot 2010} + \frac{2011}{2 \cdot 2009} + \ldots + \frac{2011}{1005 \cdot 1006}\right] =$ . . . . . . 1p

$= 2011[2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2009 + 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2008 \cdot 2010 + \ldots + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 1004 \cdot 1007 \cdot \ldots \cdot 2010] =$ . . . 1p

$= 2011 \cdot a$ , $a \in \mathbb{N}$ de unde avem că 2011 îl divide pe $x$. . . . . . . . 1p