CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
"MATEMATICA DE DRAG"
EDIȚIA a V-a (19 - 21 noiembrie 2010)
CLASA a XII a

1. Fie $B = A - \lambda_1 I_2, C = A - \lambda_2 I_2$ 1p

Avem $BC = CB = A^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)A + \lambda_1\lambda_2 = O_2$, ... 2p

conform teoremei Cayley-Hamilton 1p

Dar $B - C = (\lambda_1 - \lambda_2) I_2$ 1p

De unde $(B-C)^{2n} = B^{2n} + C^{2n} = (\lambda_2 - \lambda_1)^{2n} I_2$, ceea ce conduce la egalitatea din enunț. 2p

2. Avem $f(x) = \dfrac{1 + e^x + 6e^{2x} + 4e^{3x} + e^{4x}}{1 + e^{4x}} =$

$= 1 + 4\dfrac{e^x(1+e^{2x})}{1+e^{4x}} + 6\dfrac{e^{2x}}{1+e^{4x}}$ 1p

Rezultă că $\int f(x)\,dx = x + 4I_1 + 6I_2$ 0.5p

Unde $I_1 = \int \dfrac{e^x(1+e^{2x})}{1+e^{4x}}dx$ și $I_2 = \int \dfrac{e^{2x}}{1+e^{4x}}dx$

Pentru a calcula I_1 punem $e^x = t$ 0.5p

și obținem $I_1 = \int \dfrac{(1+t^2)}{1+t^4}dt = \int \dfrac{\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)}{t^2 + \dfrac{1}{t^2}}dt$ 1p

Acum, punem $t - \dfrac{1}{t} = u$ 1p

și obținem $I_1 = \int \dfrac{du}{u^2+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{u}{\sqrt{2}} + C$ 0.5p

De unde $I_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(e^x - \dfrac{1}{e^x}\right) + C'$ 0.5p

Pentru a găsi I_2 punem $e^{2x} = y$ 0.5p

și obținem $I_2 = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{dy}{1+y^2} = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} y + C$ 0.5p

În final, avem $\int f(x)dx = x + 2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(e^x - \dfrac{1}{e^x}\right) + 3\operatorname{arctg} e^{2x} + C$ 0.5p

3. Ridicăm ambii membri la puterea $n(n+1)(n+2)$ și obținem $\dfrac{((n+2)!)^{n(n+1)} \cdot (n!)^{(n+1)(n+2)}}{((n+1)!)^{2n(n+2)}} < \left(\dfrac{e}{3}\right)^n$ 1p

Notăm membrul *I* cu $\varphi(n)$ și avem $\varphi(n) = \left(\dfrac{(n+2)!n!}{(n+1)!}\right)^{n(n+1)}\left(\dfrac{n!}{(n+1)!}\right)^{2n}(n!)^2$ 1p

$$=\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n(n+1)}\frac{(n!)^2}{(n+1)^{2n}}=\left(\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right)^n\frac{(n!)^2}{(n+1)^{2n}}<e^n\frac{(n!)^2}{(n+1)^{2n}}=\left(\frac{e}{3}\right)^n\frac{3^n(n!)^2}{(n+1)^{2n}}$$ ….1p

Acum, prin inducție demonstrăm că (1) $\frac{3^n(n!)^2}{(n+1)^{2n}}<1$ ……………………………..1p

Pentru $n = 1$, avem că $\frac{3}{4}<1$ ………………………………………………………1p

Presupunem (1) adevărată pentru n și să arătăm că are loc și pentru $n + 1$, adică

$\frac{3^{n+1}((n+1)!)^2}{(n+2)^{2n+2}}<1$ ………………………………………………………………1p

Avem $\frac{3^{n+1}((n+1)!)^2}{(n+2)^{2n+2}}=\frac{3^n(n!)^2}{(n+1)^{2n}}\cdot\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2\cdot\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{2n}<1$ …………………………...1p