CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
"MATEMATICA DE DRAG"
EDIȚIA a V-a (19 - 21 noiembrie 2010)
CLASA a XI a

1. Se observă că $A_n = B \cdot C \cdot D$, unde

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{pmatrix}$$ ………………………..… 3p

Cum $\det(A_n) = \det B \cdot \det C \cdot \det D$ și …………………………………………..... 1p

$\det B = (b-a)(c-a)(c-b)$ ……………………………………………………1p

$\det C = a^n b^n c^n$ ……………………………………………………………..1p

$\det D = -(b-a)(c-a)(c-b)$ ……………………………………………... 1p

Rezultă cerința problemei.

2. Aplicăm $\dfrac{x+y}{2} \le \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}, x, y \ge 0$. ………………………………………..… 2p

ΔABC ascuțitunghic implică $\sin 2A, \sin 2B, \sin 2C$ pozitive și avem

$$\frac{a\sqrt{\sin 2B} + b\sqrt{\sin 2A}}{2} \le \sqrt{\frac{a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A}{2}} = \sqrt{2S}$$ ……………………………. 1p

Deoarece $a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A = \dfrac{2S \sin A \sin 2B}{\sin B \sin C} + \dfrac{2S \sin B \sin 2A}{\sin A \sin C} =$

$$= 4S \frac{\sin A \cos B + \sin B \cos A}{\sin C} = 4S \frac{\sin(A+B)}{\sin C} = 4S$$ ………………………………. 3p

Scriem relațiile analoage și sumând obținem inegalitatea dată. …………………….… 1p

3. Din $x_{n+1} - x_n = a^{-x_n} > 0$ rezultă că (x_n) este strict crescător. ………………….. 0.5p

Fie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, trecem la limită în relația de recurență și obținem $x = x + a^{-x}$, de unde $x = \infty$. ……………………………………………………………………………...0.5p

Avem $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}-x_n}{\ln(n+1) - \ln n} =$ ………………………………………………1p

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a^{-x_n}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{na^{-x_n}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} =$$ ……………………………………………….…1p

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^{x_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{a^{x_{n+1}} - a^{x_n}} =$$ ………………………………..…………………1p

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^{x_n + a^{-x_n}} - a^{x_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^{x_n}\left(a^{a^{-x_n}} - 1\right)} =$$ ………………………………………...1p

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a^{-x_n}}{a^{a^{-x_n}} - 1} \overset{y=a^{-x_n}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{y}{a^y - 1} =$$ ………………………………………………1p

$$= \frac{1}{\ln a}.$$ ……………………………………………………………………….…1p