CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
"MATEMATICA DE DRAG"
EDIȚIA a V-a (19 - 21 noiembrie 2010)
CLASA a X a

1. Demonstrăm prin inducție matematică că (1) $\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^n, n \in \mathbb{N}$ 1p

Verificare pentru $n = 1$ 1p

Presupunem (1) adevărată pentru n și o demonstrăm pentru $n + 1$, adică

(2) $\frac{x^{n+1} + y^{n+1}}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^{n+1}$ 1p

Avem $\left(\frac{x+y}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{x+y}{2}\right)^n \cdot \frac{x+y}{2} \leq \frac{x^n + y^n}{2} \cdot \frac{x+y}{2}$ 1p

Acum demonstrăm că $\frac{x^n + y^n}{2} \cdot \frac{x+y}{2} \leq \frac{x^{n+1} + y^{n+1}}{2}$ 1p

Echivalent cu $x^{n+1} + x^n y + xy^n + y^{n+1} \leq 2x^{n+1} + 2y^{n+1}$

Sau $(x^n - y^n)(x - y) \geq 0$, evidentă. 1p

Acum, avem $1 + \frac{(x+y)^1}{x+y} + \frac{(x+y)^2}{x^2 + y^2} + ... + \frac{(x+y)^n}{x^n + y^n} \leq 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{n-1} = 2^n$ 1p

2. Din $0 \in [-1;1]$, avem că $\max_{x \in [-1;1]} \left|ax^2 + bx - 1\right| \geq \left|a \cdot 0^2 + b \cdot 0 - 1\right| = 1, \forall a, b \in \mathbb{R}$ 1p

Putem scrie $\max_{x \in [-1;1]} \left|ax^2 + bx - 1\right| \leq 1$, adică $-1 \leq ax^2 + bx - 1 \leq 1$, echivalent cu

$ax^2 + bx \geq 0, ax^2 + bx - 2 \leq 0, \forall x \in [-1;1]$ 1p

Pentru $\alpha \in [0;1]$, înlocuind $x = \alpha, x = -\alpha$ în $ax^2 + bx \geq 0 \Leftrightarrow a\alpha^2 + b\alpha \geq 0$,

$a\alpha^2 - b\alpha \geq 0$ 1p

De unde $\alpha \geq 0$ și b aparține tuturor intervalelor $[-a\alpha; a\alpha], \alpha \in [0;1] \Rightarrow b = 0$. 1p

Rezultă $ax^2 - 2 \leq 0, \forall x \in [-1;1]$ 1p

Aceasta este îndeplinită pentru că $a = 0$, iar pentru $a > 0$ condiția devine

$[-1;1] \subset \left[-\sqrt{\frac{2}{a}}; \sqrt{\frac{2}{a}}\right]$, adică $a \leq 2$. 1p

Așadar, mulțimea cerută este $[0;2] \times \{0\}$. 1p

3. Pentru $p = 2$ avem 9 + 19 = 28, care nu este pătrat perfect. 0.5p

Pentru $p \geq 3$ numerele prime pot fi de formele $4k+1, 4k+3, k \in \mathbb{N}^*$ 0.5p

Dacă $p = 4k+1$, atunci $3^p + 19(p-1) = 3 \cdot 81^k + 4 \cdot 19k \equiv 3 (\bmod 4)$ 1p

Care ne arată că nu avem pătrat perfect 0.5p

Dacă $p = 4k+3$, atunci 0.5p

$3^p + 19(p-1) \equiv 3 - 19 (\bmod p) \equiv -16 (\bmod p)$, ... 1p

de unde $p | n + 16$ 1p

Dacă $n = m^2, m \in \mathbb{N}^*$, atunci $p | n^2 + 4^2$ 1p

Cum p este de forma $4k+3$, rezultă $p | n$ și $p | 4$, ceea ce este imposibil. 0.5p

Așadar, pentru p prim nu există pătrate perfecte de forma dată. 0.5p