Concursul naţional de matematică

"LAURENŢIU PANAITOPOL"

Ediţia a VIII-a, Bucureşti, 14.11.2015

Clasa a VIII-a

Soluţii şi bareme

Problema 1

Se consideră $a \in \mathbb{R}$ şi ecuaţia (*) $4x^4 + a^2 = 4x^2 a + 1$ cu necunoscuta $x \in \mathbb{R}$.
Determinaţi valorile lui *a* pentru care ecuaţia (*) are soluţie unică.

***

Răspuns: $a = 1$ Ecuaţia este echivalentă cu $\left(2x^2 - a\right)^2 = 1$, echivalentă cu $\left\|2x^2 - a\right\| = 1$ Obţinem $2x^2 = a + 1$ sau $2x^2 = a - 1$	**2p**
Dacă $a < -1$, atunci cele două ecuaţii de mai sus nu au soluţii, deci ecuaţia (*) nu are soluţii.	**2p**
Dacă $a > -1$, ecuaţia $2x^2 = a + 1$ are două soluţii, deci ecuaţia (*) are cel puţin 3 soluţii.	**2p**
Pentru $a = -1$, ecuaţia (*) are soluţia unică $x = 0$.	**1p**

Problema 2

Se consideră numerele reale pozitive *x*, *y* şi *z*.

Demonstraţi că, dacă $x + y + z = 1$, atunci $\left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{y}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{z}\right) \geq 64$.

***

Avem $1 + \frac{1}{x} = \frac{2x + y + z}{x}$.	**1p**
Aplicând inegalitatea dintre media aritmetică şi cea geometrică, obţinem în continuare $\frac{2x + \left(y + z\right)}{x} \geq \frac{2x + 2\sqrt{yz}}{x} \geq \frac{2\left(2\sqrt{x\sqrt{yz}}\right)}{x} = \frac{4\sqrt{x\sqrt{yz}}}{x}$. De asemenea $\frac{2y + \left(x + z\right)}{y} \geq \frac{4\sqrt{y\sqrt{xz}}}{y}$ şi $\frac{2z + \left(x + y\right)}{z} \geq \frac{4\sqrt{z\sqrt{xy}}}{z}$.	**4p**
Înmulţind membru cu membru cele trei inegalităţi, obţinem concluzia.	**2p**

Problema 3

4. Se consideră două numere naturale nenule *a* şi *b* care verifică egalitatea

$$a^2 - 4b^2 = b\left(8a + 1\right) .$$

a) Arătaţi că *b* este pătrat perfect;

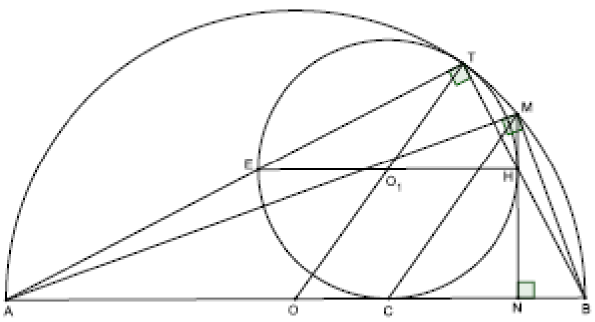
b) Daţi exemplu de o pereche de naturale nenule $\left(a, b\right)$ care verifică egalitatea din enunţ.

a) Relaţia este echivalentă cu $a^2 = b(4b+8a+1)$ Dacă p este un divizor prim al lui b, atunci $p \mid a$, deci p nu divide pe $4b+8a+1$. Deducem că numerele b şi $4b+8a+1$ sunt prime între ele. Înseamnă că numerele b şi $4b+8a+1$ sunt pătrate perfecte. **b)** Dacă $b=1$, egalitatea devine $a^2 = 8a+5$. Cum numerele de forma $8a+5$ nu sunt pătrate perfecte, ecuaţia obţinută nu are soluţie. Dacă $b=4$, egalitatea devine $a^2 = 32a+68$, echivalentă cu $(a-16)^2 = 324$. Obţinem $\lvert a-16 \rvert = 18$, de unde obţinem $a = 34$. Deci $(a,b) = (34,4)$	**1p** **2p** **1p** **3p**

Problema 4

Se consideră un semicerc ω de diametru $[AB]$ şi un cerc γ tangent segmentului $[AB]$ în punctul C şi tangent semicercului ω în punctul T. Fie $M \in \omega,\ N \in [CB]$ astfel încât $MN \perp AB$ şi dreapta MN este tangentă cercului γ. Arătaţi că semidreapta $(MC$ este bisectoarea unghiului AMN.

***

Fie H şi T punctele în care dreptele TB şi TA intersectează γ. Cum $m(ATB) = 90^\circ$, rezultă că $[HE]$ este diametru în γ. Cum centrul cercului γ, centrul semicercului şi T sunt coliniare, rezultă că $[HE]$ este paralelă cu AB, deci $HE \perp MN$, adică H este punctul de tangenţă a dreptei MN cu cercul γ. Din puterea punctului B în raport cu cercul γ, avem $BC^2 = BH \cdot BT$.(1) Pe de altă parte, $m(MTB) = m(MAB) = m(HMB)$(3), deci triunghiurile BHM şi BMT sunt asemenea. Prin urmare, $BH \cdot BT = BM^2$ (2) Din (1) şi (2) rezultă că triunghiul BMC este isoscel cu $BM = BC$. Deducem că $BMC \equiv BCM$. Dar $m(AMC) = m(NCM) - m(CAM)$, iar $m(CMN) = m(CMB) - m(NMB)$. Din ultimele două relaţii, ţinând seama de (3), rezultă concluzia.	**1p** **1p** **1p** **2p** **2p**