Societatea de Ştiinţe Matematice din România, filiala Bucureşti
Colegiul Naţional „Spiru Haret”, Bucureşti
Centrul de Documentare şi Informare „Laurenţiu Panaitopol”
Institutul de Matematică al Academiei Române

CONCURSUL DE MATEMATICĂ „LAURENŢIU PANAITOPOL”

Ediţia a VIII-a, Bucureşti, 14 noiembrie 2015

Soluţii şi barem de corectare - clasa a XI-a

1. Rezolvaţi ecuaţia $\log_2(\log_2(1+\cos 4x)) + 2\sin x \sin 5x = 2^{2^{1+\cos 6x}}$.

Soluţie. Membrul stâng este cel mult $\log_2(\log_2 2) + 2 = 2$, iar membrul drept este cel puţin $2^{2^0} = 2$ **4p**

Egalitatea se obţine pentru $\cos 4x = 1$, $\sin x \sin 5x = 1$ şi $\cos 6x = -1$ **1p**

Cum $2\sin x \sin 5x = \cos 4x - \cos 6x$, soluţiile ecuaţiei sunt soluţiile comune ale ecuaţiilor $\cos 4x = 1$, $\cos 6x = -1$, adică $x = \frac{(2n+1)\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$ **2p**

2. Şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este dat de $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$ şi $a_{n+3} = \frac{a_{n+2}a_{n+1}+7}{a_n}$ pentru $n \geq 1$. Arătaţi că toţi termenii şirului sunt numere întregi.

Soluţie. Avem $a_n a_{n+3} - a_{n+2}a_{n+1} = 7 = a_{n+1}a_{n+4} - a_{n+3}a_{n+2}$, deci $a_{n+3}(a_n + a_{n+2}) = a_{n+1}(a_{n+2} + a_{n+4})$ .. **2p**

Rezultă $\frac{a_n+a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+2}+a_{n+4}}{a_{n+3}}$, deci şirul $(\frac{a_n+a_{n+2}}{a_{n+1}})_{n\geq 1}$ este periodic de perioadă 2 .... **3p**

Cum $\frac{a_1+a_3}{a_2} = 2$ şi $\frac{a_2+a_4}{a_3} = 5$, obţinem $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$ pentru n impar şi $a_{n+2} = 5a_{n+1} - a_n$ pentru n par, de unde concluzia **2p**

3. Demonstraţi că funcţia $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + x}}} + \sqrt{3}\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + x}}}$ este strict monotonă.

Soluţie. Cu substituţia $x = 2\cos t, t \in [0, \pi]$ şi folosind relaţiile $1 + \cos 2a = 2\cos^2 a$, $1 - \cos 2a = 2\sin^2 a$ obţinem $f(x) = 2\cos\frac{t}{8} + 2\sqrt{3}\sin\frac{t}{8} = 4\sin(\frac{t}{8} + \frac{\pi}{6}) = 4\sin(\frac{1}{8}\arccos\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6})$ **4p**

Deoarece funcţia arccos este strict descrescătoare, $0 \leq \frac{1}{8}\arccos\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}$ şi funcţia sin este strict crescătoare pe $[0, \frac{\pi}{2}]$, deducem că f este strict descrescătoare **3p**

Observaţie. Putem folosi şi substituţia $\sqrt{2 + \sqrt{2 + x}} = y$, combinată cu observaţia că $f^2(x) = 8 - 2y + 2\sqrt{3}\sqrt{4 - y^2}$ şi cu argumente asemănătoare cu cele de mai sus.

4. Determinaţi funcţiile injective $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ care au proprietatea $2f(f(n)) \leq n + f(n)$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Soluţie. Presupunem că există n astfel încât $f(n) < n$. Atunci $f(f(n)) < n$ şi, folosind ipoteza, obţinem inductiv $f^{[k]}(n) < n$, unde $f^{[k]} = f \circ f \circ \ldots \circ f$ de k ori **2p**

Rezultă că mulţimea $\{f^{[k]}(n) \mid k \in \mathbb{N}^*\}$ este finită, deci există $p > q$ aşa încât $f^{[p]}(n) = f^{[q]}(n)$. Cum f este injectivă, rezultă $f^{[p-q]}(n) = n$ – contradicţie – deci presupunerea făcută este falsă **3p**

Deducem $f(f(n)) \geq f(n) \geq n$, iar ipoteza duce la $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}$ **2p**