IMAR 2014

Problema 1. Fie ABC un triunghi şi fie M mijlocul laturii BC. Cercul de centru M şi rază MA intersectează a doua oară dreptele AB şi AC în punctele B', respectiv C', iar tangentele acestui cerc în B' şi C' se intersectează în punctul D. Arătaţi că mijlocul segmentului AD este situat pe mediatoarea laturii BC.

Problema 2. Fie ϵ un număr real strict pozitiv. Un număr natural este ϵ-*pătratic*, dacă el este produsul a două numere naturale a şi b, astfel încât $1 < a < b < (1+\epsilon)a$. Arătaţi că există o infinitate de secvenţe de câte şase numere naturale ϵ-pătratice consecutive.

Problema 3. Fie f un polinom primitiv cu coeficienţi întregi (cel mai mare divizor comun al lor este 1), astfel încât f este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$, iar $f(X^2)$ este reductibil în $\mathbb{Q}[X]$. Arătaţi că $f = \pm(u^2 - Xv^2)$, unde u şi v sunt polinoame cu coeficienţi întregi.

De exemplu, dacă a şi b sunt numere întregi coprime şi a este impar, atunci $f = a^4X^2 + 4b^4$ este un polinom primitiv cu coeficienţi întregi, ireductibil în $\mathbb{R}[X] \supset \mathbb{Q}[X]$, $f(X^2) = a^4X^4 + 4b^4 = (a^2X^2 - 2abX + 2b^2)(a^2X^2 + 2abX + 2b^2)$ este reductibil în $\mathbb{Z}[X] \subset \mathbb{Q}[X]$ şi $f = (a^2X + 2b^2)^2 - X \cdot (2ab)^2$.

Problema 4. Fie n un număr natural nenul. Un *arbore Steiner* asociat unei mulţimi finte S de puncte în spaţiul euclidian $\mathbb{R}^n$ este o mulţime finită T de segmente în $\mathbb{R}^n$, astfel încât oricare două puncte din S sunt unite printr-un drum unic în T; lungimea lui T este suma lungimilor segmentelor sale. Arătaţi că există un arbore Steiner de lungime $1 + (2^{n-1} - 1)\sqrt{3}$, asociat mulţimii vârfurilor unui n-cub unitate.