

CLASA A X-A – ENUNȚURI

1. Arătați că pentru orice număr natural nenul n există o mulțime de numere complexe A_n , având n elemente, astfel încât corespondența $x \rightarrow f(x) = x^2$ să definească o funcție bijectivă $f : A_n \rightarrow A_n$.

2. Aflați $a, b, c \in \mathbb{R}$ pentru care mulțimea soluțiilor ecuației

$$a \sin x + \sin 3x + b \sin 5x + c \sin 7x = 0$$

este

$$\left\{ \frac{k\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Laurențiu Panaitopol

3. Considerăm un număr real $a > 0, a \neq 1$.

a) Arătați că șirul $\left(\frac{a^n - 1}{n} \right)_{n \geq 1}$ este strict crescător.

b) Arătați că funcția $f : \mathbb{Q}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ dată de $f(x) = \frac{a^x - 1}{x}$ este injectivă.

4. Aflați toate perechile (a, b) de numere naturale pentru care numărul $3^a + 7^b$ este pătrat perfect.

CLASA A X-A – SOLUȚII ȘI BAREME

1. Arătați că pentru orice număr natural nenul n există o mulțime de numere complexe A_n , având n elemente, astfel încât corespondența $x \rightarrow f(x) = x^2$ să definească o funcție bijectivă $f : A_n \rightarrow A_n$.

Soluție. Dacă n este impar putem lua $A_n = \{z \in \mathbb{C} | z^n = 1\}$. **3p**

În acest caz funcția este corect definită (căci $z^n = 1 \Rightarrow z^{2n} = 1$) și injectivă (căci $z^2 = t^2$ și $z \neq t$ implică $t = -z$, de unde $t^n = -1$ – contradicție). Cum mulțimea este finită, funcția este și bijectivă. **2p**

Dacă n este par putem lua $A_n = A_{n-1} \cup \{0\}$. **2p**

2. Aflați $a, b, c \in \mathbb{R}$ pentru care mulțimea soluțiilor ecuației $a \sin x + \sin 3x + b \sin 5x + c \sin 7x = 0$ este $\{k\pi/4 | k \in \mathbb{Z}\}$.

Laurențiu Panaitopol

Soluție. Ecuația trebuie să aibă soluția $\pi/4$ și soluția $\pi/2$, deci $a + 1 - b - c = 0$ și $a - 1 + b - c = 0$, de unde $a = c$ și $b = 1$. **2p**

Ecuația se scrie $\sin 4x(\cos x + a \cos 3x) = 0$, sau $\cos x \sin 4x(4a \cos^2 x - 3a + 1) = 0$. **1p**

Cerința se realizează dacă și numai dacă ecuația $4a \cos^2 x - 3a + 1 = 0 \Leftrightarrow 2a \cos 2x = a - 1$ nu are soluții, sau are soluțiile tot de forma dată. **1p**

Prima variantă se realizează dacă $a = 0$ sau $\frac{a-1}{2a} \notin [-1, 1]$. **1p**

A doua variantă se realizează când ecuația duce la $\cos 2x = 0$ sau la $\cos 2x = \pm 1$. **1p**

Obținem în final $c = a \in [-1, \frac{1}{3}] \cup \{1\}$, $b = 1$. **1p**

3. Considerăm un număr real $a > 0, a \neq 1$.

a) Arătați că șirul $\left(\frac{a^n - 1}{n}\right)_{n \geq 1}$ este strict crescător.

b) Arătați că funcția $f : \mathbb{Q}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ dată de $f(x) = \frac{a^x - 1}{x}$ este injectivă.

Soluție. a) Avem de arătat că $\frac{a^{n+1} - 1}{n+1} > \frac{a^n - 1}{n}$, **1p**

adică $(a - 1)^2(1 + 2a + 3a^2 + \dots + na^{n-1}) > 0$ – evident. **2p**

b) Arătăm că funcția este strict crescătoare. **1p**

Dacă $x_1 > x_2$ sunt numere raționale pozitive, atunci există $m > n$ și p , numere naturale nenule, astfel încât $x_1 = \frac{m}{p}, x_2 = \frac{n}{p}$. Fie $b = \sqrt[p]{a}$. Atunci, conform a),

$$f(x_1) = p \frac{b^m - 1}{m} > p \frac{b^n - 1}{n} = f(x_2). \quad \textbf{3p}$$

4. Aflați toate perechile (a, b) de numere naturale pentru care numărul $3^a + 7^b$ este pătrat perfect.

Soluție. Dacă $b = 0$, atunci $3^a = n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$ implică $n - 1$ și $n + 1$ puteri ale lui 3; cum diferența lor este 2, aceasta se poate dacă și numai dacă $a = 1$. Obținem soluția $a = 1, b = 0$. **1p**

Dacă $b \geq 1$, deoarece pătratele perfecte dau resturile 1, 2 sau 4 (mod 7), trebuie ca restul lui 3^a (mod 7) să fie unul dintre aceste numere, ceea ce se întâmplă dacă și numai dacă a este par. **2p**

Condiția devine $7^b = (x - 3^c)(x + 3^c), x, c \in \mathbb{N}^*$, deci parantezele sunt puteri ale lui 7, de unde $2 \cdot 3^c = 7^d - 7^e, d, e \in \mathbb{N}$. Aceasta nu este posibil decât dacă $e = 0$ și $3^{c-1} = 7^{d-1} + 7^{d-2} + \dots + 1$. Pentru $c > 1$, analizând ultima relație (mod 3) rezultă $d = 3f, f \in \mathbb{N}^*$, de unde $2 \cdot 3^c = (7^f - 1)(7^{2f} + 7^f + 1)$, ceea ce conduce la $7^f - 1 = 2 \cdot 3^g, 7^{2f} + 7^f + 1 = 3^h, g, h \in \mathbb{N}$. Obținem egalitatea $4 \cdot 3^{2g} + 6 \cdot 3^g + 3 = 3^h$, care nu este posibilă decât pentru $h = 1$ (deoarece membrul stâng este divizibil cu 3, dar nu cu 3^2). Deducem $f = 0$, ceea ce nu convine. **3p**

Rămâne cazul $c = 1$, de unde $d = 1$, ceea ce conduce la soluția $a = 2, b = 1$. **1p**