Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Filiala Tulcea

Concursul Naţional LAURENŢIU PANAITOPOL
23 februarie 2013, Tulcea

CLASA a XI-a

Problema 1. Fie a şi b două numere reale pozitive, $a < b$. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty}\{\sqrt[n]{a^n+b^n}\} = \{b\},$$

unde $\{\ \}$ este funcţia parte fracţionară.

Gazeta Matematică

Problema 2. Fie x un număr real. Să se demonstreze că şirul

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{4^k + x^{4k}}, \quad n \geq 0,$$

este convergent.

Problema 3. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $A \neq O_2$. Să se demonstreze că $A^2 = O_2$ dacă şi numai dacă ecuaţia matriceală $X^2 = A$, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ nu are soluţii.

Laurenţiu Panaitopol

Problema 4. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi n^2 numere complexe, oricare două distincte. Arătaţi că se poate forma cu ele o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu determinantul nenul.

Problema 1. Fie a şi b două numere reale pozitive, $a < b$. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \{\sqrt[n]{a^n + b^n}\} = \{b\},$$

unde $\{\ \}$ este funcţia parte fracţionară.

Soluţie. Avem $b \leq \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq b\sqrt[n]{2}$, deci şrul $(\sqrt[n]{a^n + b^n})_n$ converge la b.

Cum $b < [b] + 1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} b\sqrt[n]{2} = b$, există un rang N de la care $\sqrt[n]{a^n + b^n} \leq [b] + 1$.

Atunci $[\sqrt[n]{a^n + b^n}] = [b]$, pentru orice $n \geq N$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} \{\sqrt[n]{a^n + b^n}\} = \lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{a^n + b^n} - [\sqrt[n]{a^n + b^n}]) = \lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{a^n + b^n} - [b]) = b - [b] = \{b\}$, ceea ce trebuia arătat.

Problema 2. Fie x un număr real. Să se demonstreze că şirul

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{4^k + x^{4k}}, \quad n \geq 0,$$

este convergent.

Soluţie. Din inegalitatea mediilor avem $\dfrac{x^{2k}}{4^k + x^{4k}} \leq \dfrac{1}{2^{k+1}}$, oricare ar fi k natural.

Atunci $s_n(x) \leq \sum_{k=0}^{n} 1/2^{k+1} < 2$, deci şirul este mărginit. Cum şirul este crescător, rezultă cerinţa.

Problema 3. [*Laurenţiu Panaitopol*]

Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $A \neq O_2$. Să se demonstreze că $A^2 = O_2$ dacă şi numai dacă ecuaţia matriceală $X^2 = A$, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ nu are soluţii.

Soluţie. Pentru implicaţia directă, observăm că existenţa lui X cu $X^2 = A$ implică $X^4 = A^2 = O_2$, de unde $X^2 = O_2$ şi apoi $A = O_2$, contradicţie.

Pentru implicaţia inversă, presupunem că $A^2 \neq O_2$ şi determinăm o soluţie de forma $X = aA + bI_2$, $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ a ecuaţiei $X^2 = A$. Avem $a^2A^2 + (2ab - 1)A + b^2I_2 = O_2$, adică $A^2 + \left(2\frac{b}{a} - \frac{1}{a^2}\right)A + \left(\frac{b}{a}\right)^2 I_2 = O_2$; cu notaţiile $u = \frac{b}{a}$ şi $v = \frac{1}{a^2}$, $v \neq 0$, relaţia revine la

$$A^2 + (2u - v)A + u^2 I_2 = O_2.$$

Alegem $u \in \mathbb{C}$ cu $u^2 = \det(A)$; observăm că pentru $\det(A) \neq 0$ sunt două valori opuse ale lui u. Dacă $2u - \operatorname{tr}(A) \neq 0$, alegem $v = 2u - \operatorname{tr}(A)$ şi soluţia se încheie. Dacă $2u - \operatorname{tr}(A) = 0$, alegem $-u$ în loc de u şi obţinem $v \neq 0$ dacă $u \neq 0$.

În sfârşit, dacă $u = 0$, atunci $\det(A) = 0$, deci $A^2 = \operatorname{tr}(A)A$, cu $t = \operatorname{tr}(A)$, $t \neq 0$. Pentru $X = \frac{1}{\sqrt{t}}A$ obţinem $X^2 = A$, ceea ce încheie soluţia.

Problema 4. [*Marcelina Popa*]

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi n^2 numere complexe, oricare două distincte. Arătaţi că se poate forma cu ele o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu determinantul nenul.

Soluţie. Utilizăm metoda inducţiei matematice.

Pentru $n = 2$ fie $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Cel puţin unul dintre cele patru numere este nenul; fie acesta $d \neq 0$. Cum $b \neq c$ rezultă că $a + b \neq a + c$, deci cel puţin una dintre aceste două sume este nenulă; fie, de pildă, $a + b \neq 0$.

Considerăm acum matricele $A_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ şi $A_2 = \begin{pmatrix} b & a \\ c & d \end{pmatrix}$. Demonstrăm că $\det A_1 \neq 0$ sau $\det A_2 \neq 0$. Dacă prin absurd am avea $\det A_1 = \det A_2 = 0$, adică $ad - bc = bd - ac = 0$, scăzând relaţiile ar rezulta $(a - b)(c + d) = 0$. Cum $a \neq b$ vom obţine $c + d = 0$ şi înlocuind în $ad - bc = 0$ va rezulta $d(a + b) = 0$, fals.

Presupunem acum afirmaţia adevărată pentru n şi o demonstrăm pentru $n + 1$. Fie $(n + 1)^2$ numere complexe distincte. Conform ipotezei de inducţie cu n^2 dintre ele putem forma matricea $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $\det B \neq 0$; rămân $2n+1$ numere complexe distincte, fie acestea $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$. Printre acestea există sigur $n+1$ numere având suma nenulă, căci altfel am avea $a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1} = 0$ şi $a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+2} = 0$, adică $a_{n+1} = a_{n+2}$, fals. Fără a restrânge generalitatea vom presupune că $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1} \neq 0$.

Formăm acum matricea A astfel: $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{n+1} \\ a_{n+2} & b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ a_{n+3} & b_{21} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{2n+1} & b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}$.

Descompunând după prima linie obţinem:

$$\det A = a_1 d_{11} - a_2 d_{12} + \ldots + (-1)^{n+2} a_{n+1} d_{1,n+1}.$$

Dacă $\det A = 0$ vom arăta că schimbând pe linia întâi elementul a_1 cu un anumit element a_k se obţine o matrice cu determinantul nenul.

Să presupunem prin absurd că orice asemenea schimbare ar conduce la o matrice cu determinantul nul. Atunci ar avea loc egalităţile:

$$\begin{aligned} a_1 d_{11} - a_2 d_{12} + a_3 d_{13} - \ldots + (-1)^{n+2} a_{n+1} d_{1,n+1} &= 0; \\ a_2 d_{11} - a_1 d_{12} + a_3 d_{13} - \ldots + (-1)^{n+2} a_{n+1} d_{1,n+1} &= 0; \\ a_3 d_{11} - a_2 d_{12} + a_1 d_{13} - \ldots + (-1)^{n+2} a_{n+1} d_{1,n+1} &= 0; \\ \ldots . \end{aligned}$$

Scăzând pe rând, din prima relaţie, fiecare dintre celelalte relaţii rezultă: $(a_1 - a_2)(d_{11} + d_{12}) = 0$, $(a_1 - a_3)(d_{11} - d_{13}) = 0$, $(a_1 - a_4)(d_{11} + d_{14}) = 0$, etc.; cum $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ sunt distincte rezultă că $d_{11} = d_{13} = d_{15} = \ldots$ şi $d_{11} = -d_{12} = d_{14} = -d_{16} = \ldots$. Aceste egalităţi ne conduc la

$$\det A = d_{11}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1})$$

şi cum $\det A = 0$ şi $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1} \neq 0$ urmează că $d_{11} = 0$, fals deoarece $d_{11} = \det B \neq 0$.

Aşadar există $k \in \{2, 3, \ldots, n + 1\}$ astfel încât schimbând a_1 cu a_k obţinem o matrice cu determinantul nenul, fapt ce încheie demonstraţia.