Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Filiala Tulcea

Concursul Naţional LAURENŢIU PANAITOPOL
23 februarie 2013, Tulcea

CLASA a XII-a

Problema 1. Într-un grup cu n elemente există două elemente de ordin p şi q, respectiv, cu $p, q \geqslant 2$ şi $(p, q) = 1$. Să se determine n, ştiind că $p + q \geqslant n - 1$.

Laurenţiu Panaitopol

Problema 2. Fie f, $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ două funcţii continue cu proprietatea că

$$\int_0^1 f^2(x)dx = \int_0^1 g^2(x)dx = 1.$$

Să se arate că există un număr $c \in [0, 1]$ astfel încât

$$f(c) + g(c) \leqslant 2.$$

Problema 3. Stabiliţi valoarea de adevăr a următoarei implicaţii:

"Dacă o funcţie continuă $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ se anulează în cel puţin un punct din intervalul $[a, b]$, atunci există $\alpha \in [a, b]$ şi există o funcţie integrabilă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $F(x) = \int\limits_{\alpha}^{x} f(t)\, dt$, pentru orice $x \in [a, b]$."

Problema 4. Fie $(G, \cdot)$ un grup finit comutativ. Spunem că un element a din G are proprietatea (P) dacă există un subgrup H al lui G astfel încât produsul elementelor din H este egal cu a. Să se arate că mulţimea elementelor lui G cu proprietatea (P) este subgrup al lui G.

Gazeta Matematică

Problema 1. [*Laurenţiu Panaitopol*]

Într-un grup cu n elemente există două elemente de ordin p şi q, respectiv, cu $p, q \geqslant 2$ şi $(p, q) = 1$. Să se determine n, ştiind că $p + q \geqslant n - 1$.

Soluţie. Din teorema lui Lagrange rezultă că p şi q divid n. Cum $(p, q) = 1$, obţinem $pq \mid n$. Atunci $p + q \geqslant n - 1 \geqslant pq - 1$, de unde $2 \geqslant (p-1)(q-1)$, ceea ce conduce la $\{p, q\} = \{2, 3\}$ şi $n = 6$.

Problema 2. Fie f, $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ două funcţii continue cu proprietatea că

$$\int_0^1 f^2(x)dx = \int_0^1 g^2(x)dx = 1.$$

Să se arate că există un număr $c \in [0,1]$ astfel încât $f(c) + g(c) \leqslant 2$.

Soluţie. Cum $2(f^2(x)+g^2(x)) \geq (f(x)+g(x))^2$, prin integrare rezultă că $\int_0^1 (f(x)+g(x))^2 \leqslant 4$.

Aplicând teorema de medie, există $c \in [0,1]$ astfel încât $(f(c) + g(c))^2 \leqslant 4$, de unde rezultă cerinţa.

Problema 3. [*Marcelina Popa*]

Stabiliţi valoarea de adevăr a următoarei implicaţii:

"Dacă o funcţie continuă $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ se anulează în cel puţin un punct din intervalul $[a, b]$, atunci există $\alpha \in [a, b]$ şi există o funcţie integrabilă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $F(x) = \int\limits_\alpha^x f(t)\, dt$, pentru orice $x \in [a, b]$."

Soluţie. Vom arăta printr-un contraexemplu că implicaţia din enunţ este falsă. Considerăm funcţia $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \sqrt{x - a}$ care este continuă şi în plus $F(a) = 0$. Presupunem prin absurd că F verifică relaţia din enunţ. Atunci $F(a) = \int\limits_\alpha^a f(t)\, dt$, deci $\int\limits_\alpha^a f(t)\, dt = 0$, de unde obţinem:

$$\int\limits_\alpha^x f(t)\, dt = \int\limits_\alpha^a f(t)\, dt + \int\limits_a^x f(t)\, dt = \int\limits_a^x f(t)\, dt.$$

Prin urmare $F(x) = \int\limits_\alpha^x f(t)\, dt$, pentru orice $x \in [a, b]$.

Fie $m = \inf f(x)$, $M = \sup f(x)$. Din teorema de medie deducem că pentru orice $x \in [a, b]$ există $\mu_x \in [m, M]$ astfel încât $F(x) = \mu_x (x - a)$. De aici rezultă că $\frac{\sqrt{x-a}}{x-a} \in [m, M]$, oricare ar fi $x \in (a, b]$, ceea ce este fals câtă vreme $\lim\limits_{x \searrow a} \frac{\sqrt{x-a}}{x-a} = \infty$.

Problema 4. [*Marian Andronache*]

Fie $(G, \cdot)$ un grup finit comutativ. Spunem că un element a din G are proprietatea (P) dacă există un subgrup H al lui G astfel încât produsul elementelor din H

este egal cu a. Să se arate că mulţimea elementelor lui G cu proprietatea (P) este subgrup al lui G.

Soluţie. Vom arăta că un element $a \in G$ are proprietatea (P) dacă şi numai dacă $a^2 = e$.

Fie a cu proprietatea (P). Atunci există $H \leq G$ cu $a = \prod_{x \in H} x$. Cum $\prod_{x \in H} x = \prod_{x \in H} x^{-1}$, rezultă că $a^2 = e$.

Fie $a \in G$ cu $a^2 = e$. Mulţimea cu elementele e şi a e subgrup (de ordin 1 sau 2) al lui G, deci a are proprietatea (P).

Cerinţa rezultă din comutativitatea grupului G.