

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICA „PANAITOPOL”

EDIȚIA a V-a, TULCEA, 23 februarie 2013

Clasa a VII - a

1. a) Se consideră numărul  $q = (1 - \sqrt{2})^2 + \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - (3 - \sqrt{2})$ . Arătați că  $|q| \in \mathbb{N}$ .

b) Determinați perechile de numere raționale pozitive  $(a; b)$ ,  $b \neq 0$ , care verifică

$$\text{egalitatea } \sqrt{ab + \sqrt{3}} = \frac{a + \sqrt{3}}{\sqrt{b}}.$$

2. Se consideră un număr natural prim  $p$ .

a) Arătați că, dacă  $p > 3$ , atunci numărul  $m = 2p^2 + 1$  este compus;

b) Determinați toate numerele naturale prime  $p$  cu proprietatea că numărul  $m = 2p^2 + 1$  este pătrat perfect.

3. Se consideră numerele reale strict pozitive și diferite  $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ .

Dacă  $\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{10}}} > \sqrt{39}$ , arătați că cel puțin unul dintre numerele

$a_1, a_2, \dots, a_{10}$  **nu** este natural.

4. Se consideră triunghiul ascuțitunghic  $ABC$  în care  $AD \perp BC$ ,  $D \in BC$ ,  $DE \perp AC$ ,  $E \in AC$ ,

iar  $M \in (DE)$  astfel încât  $\frac{DC}{DM} = \frac{DB}{EM}$ . Demonstrați că  $AM \perp BE$ .

**Notă:** - Toate subiectele sunt obligatorii.

- Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.

- Timp de lucru: 3 ore efectiv.

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICA „PANAITOPOL”**

**EDIȚIA a V-A, TULCEA, 23 februarie 2013**

**Soluții orientative și bareme**

**Clasa a VII-a**

**Problema 1.**

a) Se consideră numărul  $q = (1 - \sqrt{2})^2 + \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - (3 - \sqrt{2})$ . Arătați că  $|q| \in \mathbb{N}$ .

b) Determinați perechile de numere raționale pozitive  $(a; b)$ ,  $b \neq 0$ , care verifică

$$\text{egalitatea } \sqrt{ab + \sqrt{3}} = \frac{a + \sqrt{3}}{\sqrt{b}}.$$

*Prof. Mircea Fianu, București*

a) $q = 3 - 2\sqrt{2} + \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} - 3 + \sqrt{2} =  1 - \sqrt{2}  - \sqrt{2}$ .	<b>2p</b>
$q = \sqrt{2} - 1 - \sqrt{2} = -1$ , deci $ q  = 1 \in \mathbb{N}$ .	<b>1p</b>
b) Ridicând la pătrat și aducând la același numitor egalitatea din enunț devine echivalentă cu $a^2 - ab^2 + 3 = \sqrt{3}(b - 2a)$ .	<b>2p</b>
$a$ și $b$ sunt numere raționale, iar $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ , rezultă că $b - 2a = 0$ , deci $b = 2a$ .	<b>1p</b>
Substituind, obținem ecuația $4a^3 - a^2 - 3 = 0$ cu soluția $a = 1$ . Rezultă $(a; b) = (1; 2)$ .	<b>1p</b>

**Problema 2.**

Se consideră un număr natural prim  $p$ .

a) Arătați că, dacă  $p > 3$ , atunci numărul  $m = 2p^2 + 1$  este compus;

b) Determinați toate numerele naturale prime  $p$  cu proprietatea că numărul  $m = 2p^2 + 1$  este pătrat perfect.

\*\*\*

a) Cum $p$ este prim cu 3, rezultă că $p^2 = 3k + 1$ , $k \in \mathbb{N}^*$ .	<b>2p</b>
Deci $m = 2p^2 + 1 = 6k + 3 = 3(2k + 1) > 3$ . Așadar, $m$ este produs de doi factori mai mari decât 1, adică este număr compus.	<b>1p</b>
b) Dacă $m = q^2$ , $q \in \mathbb{N}^*$ , obținem $2p^2 + 1 = q^2$ , adică $2p^2 = (q - 1)(q + 1)$ .	<b>2p</b>
Deoarece membrul stâng al ultimei relații este număr par, iar numerele $q - 1$ , $q + 1$ au aceeași paritate, rezultă că ambele sunt pare. Deci membrul drept al egalității este multiplu de 4.	<b>1p</b>
Deducem că $p = 2$ . Într-adevăr, $2 \cdot 2^2 + 1 = 3^2$	<b>1p</b>

**Problema 3.**

Se consideră numerele reale strict pozitive și diferite  $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ .

Dacă  $\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{10}}} > \sqrt{39}$ , arătați că cel puțin unul dintre numerele

$a_1, a_2, \dots, a_{10}$  **nu** este natural.

*Prof. Mircea Fianu, București*

Presupunem că toate numerele $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ sunt naturale.	
Atunci $S = \frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{10}}} \leq \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{10}}$ .	<b>2p</b>
Pentru $i = \overline{2,3}$ , avem $\frac{1}{\sqrt{i}} < 1$ , pentru $i = \overline{5,8}$ , avem $\frac{1}{\sqrt{i}} < \frac{1}{2}$ , iar pentru $i = 10$ , avem $\frac{1}{\sqrt{10}} < \frac{1}{3}$ .	<b>3p</b>
Prin urmare, $S < 1 + 2 \cdot 1 + \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 6 \frac{1}{6}$ .	<b>1p</b>
Cum $\sqrt{39} < S < 6 \frac{1}{6} < \sqrt{39}$ , obținem contradicție, deci cel puțin unul dintre cele 10 numere <b>nu</b> este natural.	<b>1p</b>

**Problema 4.**

Se consideră triunghiul ascuțitunghic  $ABC$  în care  $AD \perp BC$ ,  $D \in BC$ ,  $DE \perp AC$ ,  $E \in AC$ ,

iar  $M \in (DE)$  astfel încât  $\frac{DC}{DM} = \frac{DB}{EM}$ . Demonstrați că  $AM \perp BE$ .

*Prof. Mircea Fianu, București*

Egalitatea $\frac{DC}{DM} = \frac{DB}{EM}$ este echivalentă cu $\frac{EM}{DM} = \frac{BD}{DC}$ . (1)	<b>1p</b>
Considerăm punctul $F \in (EC)$ astfel încât $DF \parallel BE$ . Conform teoremei lui Thales aplicată în triunghiul $BEC$ , avem $\frac{EF}{FC} = \frac{BD}{DC}$ . (2)	<b>2p</b>
Din (1) și (2) deducem că $\frac{EF}{FC} = \frac{EM}{DM}$ și conform reciprocei teoremei lui Thales aplicată în triunghiul $EDC$ , obținem $MF \parallel DC$ . Cum $DC \perp AD$ , rezultă că $FM \perp AD$ .	<b>2p</b>
În triunghiul $ADF$ , $DE$ și $FM$ sunt înălțimi, deci punctul $M$ este ortocentrul. Deducem că $AM \perp DF$ și, cum $DF \parallel BE$ , obținem $AM \perp BE$ .	<b>2p</b>