## CLASA A IX-A – ENUNŢURI

**1.** Fie $a, b, c \in [0, +\infty)$. Arătaţi că $|a-b|+|b-c|+|c-a| = 2\max\{a, b, c\}$ dacă şi numai dacă $abc = 0$.

*Laurenţiu Panaitopol*

**2.** Pe laturile unui triunghi $ABC$ luăm punctele distincte $A_1, A_2 \in (BC)$, $B_1, B_2 \in (AC)$, $C_1, C_2 \in (AB)$ astfel încât $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2} = \overrightarrow{0}$.

a) Arătaţi că, dacă $x, y, z$ sunt numere reale astfel încât $\overrightarrow{A_1A_2} = x\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{B_1B_2} = y\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{C_1C_2} = z\overrightarrow{AB}$, atunci $x = y = z$.

b) Fie $\{M\} = A_2B_1 \cap B_2C_1, \{N\} = B_2C_1 \cap C_2A_1, \{P\} = C_2A_1 \cap A_2B_1$. Arătaţi că

$$\frac{A_2B_1}{MP} = \frac{B_2C_1}{MN} = \frac{C_2A_1}{NP}.$$

**3.** Este totdeauna posibil să partiţionăm o mulţime de 2013 numere naturale, aflate în progresie aritmetică, în trei mulţimi astfel încât suma elementelor din fiecare mulţime să fie aceeaşi? Dar o mulţime de 2012 numere?

**4.** Funcţia $f : \mathbb{Z} \to \{0, 1\}$ are proprietăţile:

(i) $f(1) = 1$

(ii) pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}$, dacă $f(a) = 1$ şi $f(b) = 1$, atunci $f(a + b) \neq f(a - b)$.

Determinaţi $f(0), f(2)$ şi $f(2013)$.

## CLASA A IX-A – SOLUŢII ŞI BAREME

**1.** Fie $a, b, c \in [0, +\infty)$. Arătaţi că $|a-b| + |b-c| + |c-a| = 2\max\{a, b, c\}$ dacă şi numai dacă $abc = 0$.

*Laurenţiu Panaitopol*

*Soluţie.* Dacă, de exemplu, $a = 0$, atunci $\max\{a, b, c\} = \max\{b, c\}$ şi

$$|a-b| + |b-c| + |c-a| = b + c + |b-c| = \max\{b, c\}.$$ **4p**

Reciproc, dacă presupunem, de exemplu, $a \leq b \leq c$ (putem, datorită simetriei), atunci $|a-b| + |b-c| + |c-a| = 2c - 2a$ şi $\max\{a, b, c\} = c$, deci $a = 0$. **3p**

**2.** Pe laturile unui triunghi $ABC$ luăm punctele distincte $A_1, A_2 \in (BC)$, $B_1, B_2 \in (AC)$, $C_1, C_2 \in (AB)$ astfel încât $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2} = \overrightarrow{0}$.

a) Arătaţi că, dacă $x, y, z$ sunt numere reale astfel încât $\overrightarrow{A_1A_2} = x\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{B_1B_2} = y\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{C_1C_2} = z\overrightarrow{AB}$, atunci $x = y = z$.

b) Fie $\{M\} = A_2B_1 \cap B_2C_1, \{N\} = B_2C_1 \cap C_2A_1, \{P\} = C_2A_1 \cap A_2B_1$. Arătaţi că

$$\frac{A_2B_1}{MP} = \frac{B_2C_1}{MN} = \frac{C_2A_1}{NP}.$$

*Soluţie.* a) Din ipoteză reiese $\overrightarrow{BC} = \frac{y}{x}\overrightarrow{AC} + \frac{z}{x}\overrightarrow{BA}$. Pe de altă parte, reprezentarea $\overrightarrow{BC} = 1 \cdot \overrightarrow{BA} + 1 \cdot \overrightarrow{AC}$ este unică, deci $y = z = x$. **4p**

b) Observăm că $\overrightarrow{B_1A_2} + \overrightarrow{C_1B_2} + \overrightarrow{A_1C_2} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2} = \overrightarrow{0}$, deci putem aplica a) în triunghiul $MNP$. **3p**

**3.** Este totdeauna posibil să partiţionăm o mulţime de 2013 numere naturale, aflate în progresie aritmetică, în trei mulţimi astfel încât suma elementelor din fiecare mulţime să fie aceeaşi? Dar o mulţime de 2012 numere?

*Soluţie.* a) Da: $2013 = 9 + 6 \cdot 334$ şi grupăm primele nouă elemente $\{a_2, a_4, a_9\}$, $\{a_1, a_6, a_8\}$, $\{a_3, a_5, a_7\}$, iar următoarele secvenţe de câte 6 termeni le grupăm $\{a_k, a_{k+5}\}$, $\{a_{k+1}, a_{k+4}\}$, $\{a_{k+2}, a_{k+3}\}$. **3p**

b) Nu. Dacă luăm primul termen foarte mare (de exemplu $10^7$) şi raţia 1, atunci una dintre mulţimi va avea suma cel mult $670 \cdot (10^7 + 2012) < 671 \cdot 10^7$, iar alta va avea suma cel puţin $671 \cdot 10^7$. **4p**

**4.** Funcţia $f : \mathbb{Z} \to \{0, 1\}$ are proprietăţile:

(i) $f(1) = 1$

(ii) pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}$, dacă $f(a) = 1$ şi $f(b) = 1$, atunci $f(a+b) \neq f(a-b)$.

Determinaţi $f(0), f(2)$ şi $f(2013)$.

*Soluţie.* Dacă $f(0) = 1$, atunci $f(1+0) \neq f(1-0)$ – contradicţie – deci $f(0) = 0$. **1p**

Din $f(1+1) \neq f(1-1)$ reiese $f(2) = 1$. **1p**

Arătăm inductiv că $f(3n) = 0, f(3n+1) = 1, f(3n+2) = 1$. **2p**

Cazul $n = 0$ a fost analizat, iar dacă presupunem proprietatea adevărată pentru un anumit $n$, atunci

- $f(3n+2-1) \neq f(3n+2+1)$ implică $f(3n+3) = 0$,
- $f(3n+2-2) \neq f(3n+2+2)$ implică $f(3n+4) = 1$,
- $f(3n+4-1) \neq f(3n+4+1)$ implică $f(3n+5) = 1$.

Deducem $f(2013) = 0$. **3p**