## Soluţii şi barem – clasa a IX-a

**1.** Pentru $a, b$ numere naturale nenule definim numărul $N(a,b) = \left\{\frac{a}{b}\right\} + \left\{\frac{2a}{b}\right\} + \left\{\frac{3a}{b}\right\} + \ldots + \left\{\frac{(b-1)a}{b}\right\}$. Arătaţi că $N(a,b)$ este întreg dacă şi numai dacă $a$ este par sau $b$ este impar.

*Soluţie.* Observăm că $\frac{ka}{b} + \frac{(b-k)a}{b} = a \in \mathbb{N}$, deci părţile fracţionare ale numerelor $\frac{ka}{b}$ şi $\frac{(b-k)a}{b}$, $k \in \mathbb{N}$, au suma 0 sau 1. .......... **3p**

Grupând termenii sumei doi câte doi, sunt posibile cazurile:

• $b$ este impar, situaţie în care suma are un număr par de termeni, având, doi câte doi, suma număr întreg; .......... **2p**

• $b$ este par, situaţie în care, ca mai sus, grupăm doi câte doi termeni având suma număr întreg şi rămâne termenul „din mijloc” $\left\{\frac{(b/2)a}{b}\right\} = \left\{\frac{a}{2}\right\}$; acesta este întreg dacă şi numai dacă $a$ este impar. Din cazurile analizate rezultă concluzia. .......... **2p**

**2.** a) Arătaţi că, dacă $a, b$ sunt numere reale pozitive, atunci $4(a^3 + b^3) \geq (a+b)^3$.

b) Determinaţi cel mai mic număr real $k$ pentru care, oricare ar fi $a, b, c$ numere reale pozitive, $k(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a+b+c)^3$.

*Soluţie.* a) Relaţia se reduce la $3(a-b)^2(a+b) \geq 0$, evident. .......... **3p**

b) Pentru $a = b = c = 1$ obţinem $3k \geq 27$, deci $k \geq 9$. .......... **2p**

Arătăm că inegalitea este valabilă pentru $k = 9$. în acest caz inegalitatea se reduce la $8(a^3+b^3+c^3) \geq 3(a+b)(a+c)(b+c)$. Aceasta rezultă din $3(a+b)(a+c)(b+c) \leq (a+b)^3 + (a+c)^3 + (b+c)^3$ şi adunarea inegalităţilor de forma $(a+b)^3 \leq 4(a^3+b^3)$. .......... **2p**

**3.** Dacă $x, y$ sunt numere reale pozitive definim $m_h(x,y) = \frac{2xy}{x+y}, m_g(x,y) = \sqrt{xy}, m_a(x,y) = \frac{x+y}{2}, m_p(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$.

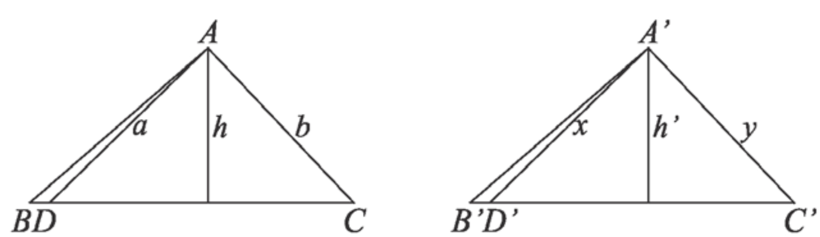
a) Arătaţi că, dacă $m_h(x,y) + m_a(x,y) = m_g(x,y) + m_p(x,y)$, atunci $x = y$.

b) Arătaţi că, dacă $m_h(x,y) + m_p(x,y) = m_g(x,y) + m_a(x,y)$, atunci $x = y$.

*Soluţie.* a) Deoarece $m_h(x,y) \leq m_g(x,y)$ şi $m_a(x,y) \leq m_p(x,y)$, egalitatea nu poate avea loc decât dacă inegalităţile devin egalităţi, ceea ce conduce imediat la concluzie. .......... **3p**

b) Scriind relaţia în forma $m_a - m_h = m_p - m_g$ obţinem $\frac{(x-y)^2}{2(x+y)} = \frac{(x-y)^2}{\sqrt{2(x^2+y^2)}+2\sqrt{xy}}$. În cazul $2(x+y) = \sqrt{2(x^2+y^2)} + 2\sqrt{xy}$ rezultă, după ridicare la pătrat şi reducerea termenilor asemenea, $(x+y)^2 = \sqrt{8xy(x^2+y^2)}$, şi după încă o ridicare la pătrat, $(x-y)^4 = 0$, deci concluzia. .......... **4p**

**4.** Fie $ABC$ şi $A'B'C'$ două triunghiuri cu $m(BAC) \geq 90°$ şi $m(B'A'C''°$. Să se arate că $\frac{1}{hh'} \geq \frac{1}{AB \cdot A'B'} + \frac{1}{AC \cdot A'C'}$, unde $h$ şi $h'$ sunt înălţimile duse din vârfurile $A$, respectiv $A'$.




*Soluţie.* Luăm pe $[BC]$ şi $[B'C']$ punctele $D$, respectiv $D'$, astfel încât $AD \perp AC$, $A'D' \perp A'C'$. Atunci $D$ este situat între piciorul înălţimii şi $B$, deci $AD \leq AB$; analog $A'D' \leq A'B'$ şi este suficient să demonstrăm inegalitatea cu $AD, A'D'$ în loc de $AB, A'B'$. .......... **3p**

În triunghiurile dreptunghice formate avem, cu notaţiile din figură, $h = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $h' = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ iar inegalitatea se reduce la $\sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)} \geq bx + cy$, ceea ce rezultă din calcule. .......... **4p**

**Soluţii şi barem – clasa a X-a**

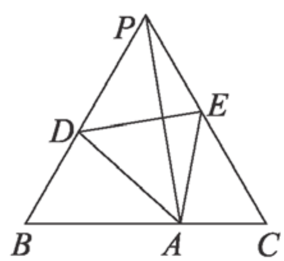
**1.** Fie $a$ un număr real. Determinaţi toate funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care au proprietatea $f(x)+f(y) = (x+y+a)f(x)f(y), \forall x,y\in\mathbb{R}$.

*Soluţie.* Pentru $x=y=0$ obţinem $2f(0)=af^2(0)$, deci $f(0)=0$ sau $f(0)=\frac{2}{a}$. . . . . . . . . . . . . **3p**
Dacă $f(0)=0$ atunci, luând $y=0$, $f(x)=0, \forall x\in\mathbb{R}$, funcţie care îndeplineşte cerinţa. . . . . . **2p**
Dacă $f(0)=\frac{2}{a}$, $a\neq 0$, atunci $f(x)+\frac{2}{a}=\frac{2}{a}(x+a)f(x)$, deci $2=(2x+a)f(x), \forall x\in\mathbb{R}$. Ultima egalitate este însă imposibilă pentru $x=-\frac{a}{2}$, deci în acest caz nu obţinem soluţii. . . . . . . . . . . . . **2p**

**2.** Un număr raţional $a>0$ are proprietatea că $\sqrt{a}+\sqrt[3]{a}$ este raţional. Arătaţi că $\sqrt[6]{a}$ este raţional.

*Soluţie.* Fie $\sqrt{a}+\sqrt[3]{a}=r$. Atunci $\sqrt[3]{a}=r-\sqrt{a}$, $a=r^3-3r^2\sqrt{a}+3ra-a\sqrt{a}$ şi $\sqrt{a}=\frac{r^3+3ra-a}{3r^2+a}$ este raţional, de unde $\sqrt[3]{a}$ este raţional. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **4p**
Astfel, $\sqrt[6]{a}=\sqrt{a}/\sqrt[3]{a}$ este raţional. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **3p**

**3.** Îndoim un triunghi echilateral de latură 1 astfel încât vârful $A$ să ajungă pe $[BC]$, ca în figura alăturată. Care este valoarea maximă a ariei patrulaterului $BCED$?




*Soluţie.* $DE$ este mediatoarea lui $AP$, unde $P$ este poziţia lui $A$ înainte de îndoire. . . . . . . . . **2p**
Aria triunghiului $PDE$ este $\frac{1}{8}l^2(\operatorname{tg} a+\operatorname{tg}(60^\circ-a))$, unde $l=AP$, $a=m(\angle BPA)$. . . . . . . . . . **2p**
Deoarece $l\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$ şi

$$\operatorname{tg} a+\operatorname{tg}(60^\circ-a)=\frac{\sin 60^\circ}{\cos a\cos(60^\circ-a)}=\frac{2\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ+\cos(60^\circ-2a)}\geq\frac{2\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ+1},$$

aria minimă a triunghiului $PDE$ este $\frac{\sqrt{3}}{16}$ şi se obţine pentru $a=30^\circ$; în acest caz aria patrulaterului $BCED$ este $\frac{3\sqrt{3}}{16}$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **3p**

**4.** Arătaţi că şirul definit prin $a_1=1, a_{n+1}=a_n+a_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}, \forall n\geq 1$ conţine o infinitate de termeni divizibili cu 7.

*Soluţie.* Observăm că $7|a_6=14$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **1p**
Arătăm că dacă $7|a_n$ atunci există $m>n$ astfel încât $7|a_m$. Pentru aceasta observăm că $a_{2n}=a_{2n-1}+a_n$ şi $a_{2n+1}=a_{2n}+a_n$, deci $a_{2n-1}\equiv a_{2n}\equiv a_{2n+1}\equiv a \pmod 7$. . . . . . . . . . . . . . . . . . **3p**
Apoi $a_{4n-2}=a_{4n-3}+a_{2n-1}$, $a_{4n-1}=a_{4n-2}+a_{2n}$, $a_{4n}=a_{4n-1}+a_{2n}$, $a_{4n+1}=a_{4n}+a_{2n}$, $a_{4n+2}=a_{4n+1}+a_{2n+1}$, $a_{4n+3}=a_{4n+2}+a_{2n+1}$, deci $a_{4n-2}\equiv a_{4n-3}+a$, $a_{4n-1}\equiv a_{4n-3}+2a$, $a_{4n}\equiv a_{4n-3}+3a$, $a_{4n+1}\equiv a_{4n-3}+4a$, $a_{4n+2}\equiv a_{4n-3}+5a$, $a_{4n+3}\equiv a_{4n-3}+6a \pmod 7$. Astfel, dacă $a\equiv 0 \pmod 7$ atunci $7|a_{2n}$, iar dacă $a\not\equiv 0 \pmod 7$, atunci unul dintre numerele $a_{4n-3}, a_{4n-2},\ldots,a_{4n+3}$ este divizibil cu 7. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **3p**

**Soluţii şi barem – clasele XI-XII**

**1.** Funcţia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ are proprietatea $f(m+n) = f(f(m)+n), \forall m, n \in \mathbb{N}$ şi este nemărginită. Arătaţi că $f$ este funcţia identică.

*Soluţie.* Să presupunem că există $m$ natural astfel încât $f(m) = p \neq m$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **3p**

Atunci ipoteza ne spune că $f(n+p) = f(n+m), \forall n \in \mathbb{N}$, deci funcţia are perioada $|m-p|$ pentru $n \geq \min\{m,p\}$. Aceasta contrazice însă faptul că $f$ este nemărginită. . . . . . . . . . . . . . . . . . . **4p**

**2.** Fie $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ o funcţie bijectivă. Arătaţi că, dacă şirul $(f(n)/n)_{n\geq 1}$ are limită, atunci aceasta este 1.

*Soluţie.* Arătăm că şirul are o infinitate de termeni mai mari sau egali ca 1 şi o infinitate de termeni mai mici sau egali ca 1. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **3p**

Într-adevăr, dacă inegalitatea $f(n) \geq n$ este valabilă doar pentru $n \leq n_0$, atunci $f(n) \leq n-1$ pentru $n > n_0$. Notând $A = \max\{f(n) | n \leq n_0\}$ şi $M = \max\{A+1, n_0+1\}$, rezultă că toate elementele mulţimii $\{f(n) | n \leq M\}$ sunt mai mici sau egale cu$M-1$, în contradicţie cu faptul că funcţia este injectivă. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **2p**

În mod analog, dacă inegalitatea $f(n) \leq n$ este valabilă doar pentru $n \leq n_0$, atunci $f(n) \geq n+1$ pentru $n > n_0$. Notând $A = \max\{f(n) | n \leq n_0\}$ şi $M = \max\{A+1, n_0+1\}$, rezultă că toate elementele mulţimii $\{f(n) | n \geq M\}$ sunt mai mari sau egale cu$M+1$, deci funcţia are cel mult $M-1$ valori mai mici sau egale cu $M$, în contradicţie cu faptul că funcţia este surjectivă. . . . . . **2p**

**3.** Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir definit prin $x_1 = a \in \mathbb{R}$, $x_{n+1} = 4x_n(1-x_n), \forall n \geq 1$. Pentru câte valori ale lui $a$ avem $x_{2013} = 0$?

*Soluţie.* Observăm că $x_1 < 0$ implică $x_2 < 0$ şi, inductiv, $x_n < 0, \forall n \geq 1$. De asemenea, $x_1 > 1$ implică $x_2 < 0$ şi, ca mai sus, $x_n < 0, \forall n \geq 2$. Astfel, $x_{2013} = 0$ implică $a \in [0,1]$. . . . . . . . . . . . . . . **2p**

Pentru $a \in [0,1]$, dacă notăm $x_1 = \sin^2\alpha, \alpha \in [0, \pi/2]$, atunci $x_2 = \sin^2 2\alpha$ şi, inductiv, $x_n = \sin^2 2^{n-1}\alpha$. Astfel $x_{2013} = 0 \Leftrightarrow 2^{2012}\alpha = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **3p**

Deoarece numărul valorilor convenabile ale lui $\alpha$ este $2^{2011}+1$ şi corespondenţa $a \to \alpha$ este o funcţie bijectivă, răspunsul este $2^{2011}+1$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **2p**

**4.** Într-o clasă sunt $2m$ elevi, $m \in \mathbb{N}^*$. Numele fiecărui elev este scris pe câte un bilet, apoi fiecare elev ia câte un bilet la întâmplare. O *mutare* constă în împărţirea elevilor în $m$ perechi şi schimbarea biletelor între cei doi membri ai fiecărei perechi. Este adevărat că, pentru orice distribuţie iniţială a biletelor, mutările pot fi astfel organizate încât la un moment dat fiecare elev să aibă biletul pe care este scris propriul nume dacă a) $m = 14$; b) $m = 15$ ?

*Soluţie.* Numerotăm elevii de la 1 la $2m$, considerăm permutarea din $S_{2m}$ care asociază fiecărui elev biletul pe care îl are la un moment dat şi observăm că schimbarea biletelor între elevii $i$, $j$ înseamnă compunerea acestei permutări cu transpoziţia $(i,j)$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **1p**

a) Răspunsul este nu. Într-adevăr, dacă permutarea iniţială este impară, atunci fiecare mutare înseamnă compunerea permutării cu 14 transpoziţii, deci paritatea permutării se păstrează şi nu putem ajunge niciodată la permutarea identică. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **2p**

b) Răspunsul este da: deoarece orice permutare se poate scrie ca produs de transpoziţii, este suficient să arătăm că putem, prin câteva mutări, să realizăm schimbarea biletelor între doi elevi $i$ şi $j$, $i \neq j$, iar ceilalţi elevi să rămână cu biletele pe care le aveau înainte de aceste mutări. . . . . **2p**

Pentru aceasta, împărţim celelalte 28 de numere în grupe de câte patru, formăm perechea $(i,j)$ de trei ori, iar în fiecare grupă de patru schimbăm perechile de trei ori, după regula

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & c & b & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}.$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **2p**