Concursul național de matematică

“LAURENȚIU PANAITOPOL”

Ediția a VI-a, Bucureşti, 09.11.2013

Clasa a VIII-a

1. Determinați numerele naturale de forma $\overline{abcd}$, $0 < a < b < c < d$, ştiind că
$(a;b)\cdot cd + (b;c)\cdot ad + (c;d)\cdot ab = \frac{1}{18}abcd$.
(Prin $(x;y)$ s-a notat cel mai mare divizor comun al numerelor naturale *x* şi *y*)

2. Determinați numerele naturale compuse care au toți divizorii de forma $2^k \pm 1$, cu $k \in \mathbb{N}^*$.

3. Se consideră triunghiul ascuțitunghic *ABC* în care $AB < AC$. Punctul *D* este piciorul înălțimii din *A* a triunghiului *ABC*, punctul *I* este centrul cercului înscris în triunghiul *ABC*, iar punctele I_1 şi I_2 sunt centrele cercurilor înscrise ale triunghiurilor *ADB* şi respectiv *ADC*. Dacă punctul *E* este proiecția punctului *I* pe dreapta *BC*, se cere:

a) Demonstrați că $CE = \frac{AC + BC - AB}{2}$;

b) Determinați măsura unghiului $\widehat{I_1EI_2}$.

4. Determinați numerele prime p şi q astfel încât să aibă loc egalitatea $7p^2 = q^2 + 1174$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7;
Timp de lucru: 3 ore efectiv.

Concursul național de matematică

“LAURENȚIU PANAITOPOL”

Ediția a VI-a, Bucureşti, 09.11.2013

Clasa a VIII-a

Soluții şi bareme

Problema1

Determinați numerele naturale de forma $\overline{abcd}$, $0<a<b<c<d$, ştiind că $(a;b)\cdot cd+(b;c)\cdot ad+(c;d)\cdot ab=\frac{1}{18}abcd$.

(Prin $(x;y)$ s-a notat cel mai mare divizor comun al numerelor naturale *x* şi *y*)

Împărțind relația din enunț cu $abcd$, obținem $\frac{1}{[a,b]}+\frac{1}{[b,c]}+\frac{1}{[c,d]}=\frac{1}{18}$.	**1p**
Cum $[m,n]\le mn$, obținem $\frac{1}{18}=\frac{1}{[a,b]}+\frac{1}{[b,c]}+\frac{1}{[c,d]}\ge\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{cd}$ Deoarece $a\le d-3,\ b\le d-2, c\le d-1$, obținem $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{cd}\ge\frac{1}{(d-3)(d-2)}+\frac{1}{(d-2)(d-1)}+\frac{1}{(d-1)d}=\frac{1}{d-3}-\frac{1}{d}=\frac{3}{d(d-3)}$ Cum $d\le 9$, avem $\frac{3}{d(d-3)}\ge\frac{3}{9\cdot 6}=\frac{1}{18}$	**2p** **2p**
Ținând seama de dubla inegalitate, obținem $\overline{abcd}=6789$.	**2p**

Problema2

Determinați numerele naturale compuse care au toți divizorii de forma $2^k\pm1$, cu $k\in\mathbb{N}^*$.

Prof. Lucian Petrescu, Tulcea

Fie m este un astfel de număr; din ipoteză rezultă că $m=2^s+1$, cu $s\in\mathbb{N}$, $s\ge 2$ sau $m=2^s-1$, cu $s\in\mathbb{N}$, $s\ge 3$. Dacă $d_{\min}=2^a\pm1$, $a\in\mathbb{N}^*$ (pentru $d_{\min}=2^a-1$, avem $a\ge 2$) este cel mai mic divizor propriu al lui m, atunci $d_{\max}=\frac{m}{d_{\min}}=2^b\pm1$, cu $a\le b$ ($a<b$ dacă se alege $d_{\min}=2^a+1$ şi $d_{\max}=2^b-1$) este cel mai mare divizor propriu al lui m (evident că $d_{\min}\le d_{\max}$). Din relația $d_{\min}\cdot d_{\max}=m$ obținem: $(2^a\pm1)(2^b\pm1)=2^s\pm1$, **(1)** cu condiția $1\le a\le b<s$ sau $2\le a\le b<s$, în cazul în care se alege $d_{\min}=2^a-1$.	**1p**
Analizând cele 8 combinații de semne din relația **(1)** obținem soluții doar în următoarele trei situații: 1. $(2^a+1)(2^b+1)=2^s+1$, când rezultă $a=b=1$ şi $s=3$, adică $\boxed{m=9}$, caz în	**2p**

care divizorii lui m sunt $\boxed{d_1 = 1 = 2^1 - 1}$, $\boxed{d_2 = d_{\min} = d_{\max} = 2^a + 1 = 2^b + 1 = 3}$ şi $\boxed{d_3 = m = 2^s + 1 = 9}$;	
2. $\left(2^a - 1\right)\left(2^b + 1\right) = 2^s - 1$, când rezultă $a = b$ şi $s = 2a$, adică $m = 2^{2a} - 1 = 4^a - 1$, caz în care m este evident divizibil cu 3; dacă $d_{\min} = 2^a - 1 > 3$ s-ar contrazice minimalitatea lui $d_{\min}$, fals şi prin urmare $d_{\min} = 2^a - 1 = 3$, de unde rezultă că $a = b = 2$ şi $s = 4$; aşadar $\boxed{m = 15}$, iar divizorii lui sunt $\boxed{d_1 = 1 = 2^1 - 1}$, $\boxed{d_2 = d_{\min} = 2^a - 1 = 3}$, $\boxed{d_3 = d_{\max} = 2^b + 1 = 5}$ şi $\boxed{d_4 = m = 2^s - 1 = 15}$;	**2p**
3. $\left(2^a + 1\right)\left(2^b - 1\right) = 2^s + 1$, când rezultă $a = 1$, $b = 2$ şi $s = 3$, adică $\boxed{m = 9}$, caz în care divizorii lui m sunt $\boxed{d_1 = 1 = 2^1 - 1}$, $\boxed{d_2 = d_{\min} = d_{\max} = 2^a + 1 = 2^b - 1 = 3}$ şi $\boxed{d_3 = m = 2^s + 1 = 9}$. În concluzie $\boxed{\boxed{m \in \{9;15\}}}$.	**2p**

Problema3

Se consideră triunghiul ascuțitunghic *ABC* în care $AB < AC$. Punctul *D* este piciorul înălțimii din *A* a triunghiului *ABC*, punctul *I* este centrul cercului înscris în triunghiul *ABC*, iar punctele I_1 şi I_2 sunt centrele cercurilor înscrise ale triunghiurilor *ADB* şi respectiv *ADC*.

Dacă punctul *E* este proiecția punctului *I* pe dreapta *BC*, se cere:

a) Demonstrați că $CE = \dfrac{AC + BC - AB}{2}$;

b) Determinați măsura unghiului $\widehat{I_1 E I_2}$.

a) Dacă *G* şi *F* sunt punctele de tangență ale cercului înscris în triunghiul *ABC* cu laturile $[AB]$, respectiv $[AC]$. Notând $CE = CF = x$, $AF = AG = y$ şi $BE = BG = z$, obținem $2(x + y + z) = AB + BC + CA$, deci $x + y + z = \dfrac{AB + BC + CA}{2}$. Obținem $x = \dfrac{AB + BC + CA}{2} - (y + z) = \dfrac{AB + BC + CA}{2} - AB = \dfrac{BC + CA - AB}{2}$	**2p**
b) Fie $I_2 N \perp BC, N \in BC$. Aplicând **a)** în triunghiul *ADC*, obținem $CN = \dfrac{DC + AC - AD}{2}$, prin urmare $EN = CE - CN = \dfrac{BC - AB - DC + AD}{2}$. Fie $I_1 M \perp BC, M \in BC$. Avem $MD = \dfrac{AD + BD - AB}{2}$ Obținem $MD - NE = 0$, deci $MD = EN$. Prin urmare segmentele $[MN]$ şi $[DE]$ au acelaşi mijloc.	**3p**
Notăm cu *P* mijlocul segmentului $\left[I_1 I_2\right]$. Deducem că $PD = PE$. Prin urmare	**1p**

$m\left(\widehat{I_1EI_2}\right)=90^\circ$	
Cum $[DP]$ este mediană în triunghiul dreptunghic I_1DI_2, înseamnă că $PE=PD=\frac{I_1I_2}{2}$, deci şi triunghiul I_1EI_2 este dreptunghic.	**1p**

Problema4

Determinați numerele prime p şi q astfel încât să aibă loc egalitatea $7p^2=q^2+1174$.

Prof. Lucian Petrescu, Tulcea

Avem $p\equiv q\pmod 2$. Cum $p=q=2$ nu este soluție, căutăm soluții $(p;q)$, cu ambele componente impare.	**2p**
Pentru $s\geq 5$, număr prim, avem $s=6n\pm 1$, $n\in\mathbb{N}^*$, deci $s^2\equiv 1\pmod 6$. Dacă am avea $p\geq 5$ şi $q\geq 5$ s-ar obține: $7p^2-q^2\equiv 7-1\equiv 0\pmod 6$, ceea ce este fals, câtă vreme $1174\equiv 4\pmod 6$	**3p**
Prin urmare $p\leq 3$ sau $q\leq 3$ şi cum p şi q sunt prime şi impare, rezultă că $p=3$ sau $q=3$. Pentru $p=3$ rezultă $q\notin\mathbb{N}$, iar pentru $q=3$ rezultă $p=13$, care este prim.	**2p**