Concursul național de matematică

“LAURENȚIU PANAITOPOL”

Ediția a VI-a, Bucureşti, 09.11.2013

Clasa a VI-a

1. a) Suma a zece numere naturale nenule şi distincte este egală cu 384. Arătați că cel puțin unul dintre cele 10 numere **nu** este pătrat perfect.
b) Scrieți numărul 384 ca o sumă de zece pătrate perfecte nenule.

2. Se consideră ecuația $x^5 + y^2 = z^3$, unde x, y şi z sunt numere naturale nenule.
O soluție a acestei ecuații este un triplet de numere naturale nenule (a,b,c) cu proprietatea că

$$a^5 + b^2 = c^3.$$

a) Arătați că tripletul $(3,10,7)$ este soluție a ecuației date;

b) Determinați o soluție a ecuației date de forma $\left(2^m, 2^n, 2^p\right)$, unde m, n şi p sunt numere naturale.

3. Numărul natural n are proprietatea că, în scrierea zecimală, fiecare cifră a sa, exceptând-o pe prima, este mai mare decât cifra precedentă.
a) Determinați câte numere n cu proprietatea din enunț au câte sapte cifre;
b) Determinați suma cifrelor numărului $999n$.

4. Determinați câte numere naturale de două cifre dau câtul egal cu restul, la împărțirea cu un număr natural nenul.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7;
Timp de lucru: 2 ore efectiv.

Concursul național de matematică

"LAURENȚIU PANAITOPOL"

Ediția a VI-a, Bucureşti, 09.11.2013

Clasa a VI-a

Soluții şi bareme

Problema 1

a) Suma a zece numere naturale nenule şi distincte este egală cu 384. Arătați că cel puțin unul dintre cele 10 numere **nu** este pătrat perfect.

b) Scrieți numărul 384 ca o sumă de zece pătrate perfecte nenule.

a) Suma celor mai mici 10 pătrate perfecte nenule diferite este egală cu $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2+10^2=385$.	**3p**
Cum $384<385$, rezultă că cel puțin unul dintre termenii sumei nu este pătrat perfect	**1p**
b) Cum $3^2+4^2=5^2$, avem $385-1^2=2^2+3^2+3^2+4^2+4^2+6^2+7^2+8^2+9^2+10^2=384$.	**3p**

Problema 2

Se consideră ecuația $x^5+y^2=z^3$, unde *x*, *y* şi *z* sunt numere naturale nenule.

O soluție a acestei ecuații este un triplet de numere naturale nenule (a,b,c) cu proprietatea că

$$a^5+b^2=c^3.$$

a) Arătați că tripletul $(3,10,7)$ este soluție a ecuației date;

b) Determinați o soluție a ecuației date de forma $\left(2^m,2^n,2^p\right)$, unde *m*, *n* şi *p* sunt numere naturale.

a) Prin calcul direct obținem $3^5+10^2=343=7^3$.	**2p**
b) Dacă $\left(2^m,2^n,2^p\right)$ este soluție, atunci $2^{5m}+2^{2n}=2^{3p}$.	**1p**
Luăm, de exemplu, $5m=2n=10k$ şi obținem $2^{10k}+2^{10k}=2^{3p}$, adică $2^{10k+1}=2^{3p}$	**2p**
Cum $3p$ se divide cu 3, putem lua $k=2$ şi obținem $p=7$, $m=4$ şi $n=10$	**2p**

Problema 3

Numărul natural *n* are proprietatea că, în scrierea zecimală, fiecare cifră a sa, exceptând-o pe prima, este mai mare decât cifra precedentă.

a) Determinați câte numere *n* cu proprietatea din enunț au câte şapte cifre;

b) Determinați suma cifrelor numărului $999n$.

a) Numerele cu proprietatea din enunț se obțin suprimând din secvența 123456789 două cifre .	**1p**
Acest lucru se poate face în $\frac{9\cdot 8}{2}=36$ de moduri, deci sunt 36 de numere.	**2p**
b) Fie $n=\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9}$. Avem $999n=\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9000}-\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9}$	**1p**

Scăzând, obținem $999n=\overline{a_1a_2a_3(a_4-a_1)(a_5-a_2)(a_6-a_3)(a_7-a_4)(a_8-a_5)(a_9-1-a_6)(9-a_7)(9-a_8)(10-a_9)}$ Deducem că suma cifrelor este egală cu 27.	**3p**

Problema 4

Determinați câte numere naturale de două cifre dau câtul egal cu restul, la împărțirea cu un număr natural nenul.

Fie *n* un număr cu proprietatea cerută, *I* un împărțitor cu $I\geq 1$ și $0\neq C=r<I$ câtul, respectiv restul împărțirii lui *n* la *I*. Avem $n=C\cdot I+r=r(I+1)$.	**1p**
Verifica toate numerele naturale de doua cifre, deoarece fiecare dintre ele impartit la predecesorul sau da catul egal cu restul. In total sunt 90 de numere.	**6p**